

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS**AS ISOMETRÍAS ¿QUÉ APORTAN Ó CURRÍCULUM DAS MATEMÁTICAS?****CACHAFEIRO CHAMOSA, Luis Carlos****I.B. Pontepedriña - SANTIAGO DE COMPOSTELA****INTRODUCCIÓN**

Tradicionalmente tense considerado, pola maioría do profesorado e dos responsábeis do curriculum, que a asignatura de Matemáticas debe estar centrada arredor duns contidos considerados como imprescindíbeis. Entre estes contidos atopamos a resolución de ecuacións, as operacións con radicais e polinomios, a xeometría do triángulo, a proporcionalidade, as funcións e conforman unha especie de "núcleo duro" dos contidos en Matemáticas na Educación Secundaria.

Co actual cambio do sistema educativo aparece unha redución do número de horas de Matemáticas con relación ó BUP, pasando a ser de tres clases á semana en toda a Secundaria Obligatoria. Isto pode facernos considerar doblemente superfluos todos aqueles contidos que non pertencen a ese "núcleo duro". Pero, isto contradí a outra modificación importante do sistema: a aparición dunha serie de obxectivos, introducidos tanto como contidos como pola vía dos obxectivos actitudinais (actitudes, valores e normas) ou procedimentais que non se inclúen nese conxunto mencionado. Do DCB E.S.O. Matemáticas recolleemos algúns destes novos obxectivos.

Identifica-las formas e relacións espaciais que se presentan na realidade, analizando as propiedades e relacións xeométricas implicadas e sendo sensible á beleza que xeran.

Valora-las matemáticas como unha ciencia integradora, recoñecendo o papel que desenvolven nos distintos ámbitos da actividade humana, non só científica e tecnolóxica senon tamén nos aspectos sociais, estéticos, laborais etc.

Elaborar estratexias persoais para a análise de situacións concretas e a identificación e resolución de problemas, empregando distintos recursos e instrumentos, e valorando a conveniencia das estratexias utilizada en función da análise dos resultados.

Reducción de problemas xeométricos complexos a outros máis sinxelos empregando a descomposición (triangulación), a transformación (traslacións, xiros e simetrías), desenvolvementos e aproximacións.

Como consecuencia do cambio, non son tan imprescindíbeis aqueles contidos como o son algúns procesos vencellados á resolución de problemas e á aplicabilidade das matemáticas. Aínda así, para que unha persoa sexa capaz de resolver problemas satisfactoriamente, debe ter práctica na resolución e dispoñer dunha cantidade aceptábel de recursos nesa área que serán expresados como contidos e procedementos. Estas novas necesidades que para ser cubertas precisan dunha parte importante dos contidos anteriores, están en contradicción co número de horas de Matemáticas na E.S.O. Ante este novo problema de coñecemento cal é a solución, pero cáese nun risco de botar por terra unha parte positiva do cambio como é a actualización do curriculum e, para o que vou desenrolar, o que supón de introducción de novos métodos xeométricos, técnicas de resolución de problemas e valoración da súa importancia cultural, artística etc. Aquí vou mostrar unha serie de actividades que nos poden axudar a ver ás isometrías como unha das partes das Matemáticas que mais recursos proporcionan para cumprir moitos dos obxectivos da Educación Secundaria Obligatoria. Aconsello ó lector que procure ver, nos libros de 3º e/ou 4º de ESO as unidades adicadas á Xeometría, especialmente ás Isometrías, pois creo que nos proporcionan moitos exemplos do interese destes contidos en relación cos obxectivos da etapa. Por elo, non farei unha descripción da unidade, senon que mostraréi só algunhas das actividades que preparei para a clase de Matemáticas de 4º de ESO realizadas no Instituto de Pontepedriña de Santiago de Compostela.

Observamos que as isometrías, por tratarse dunha aplicación do plano en sí mesmo, están abrindo ó camiño a unha formalización das funcións e, por tratarse dunha aplicación do plano en sí mesmo, ó paso das funcións de variábel real ¡ás de variábel complexa!. Teño especial interese no uso correcto da notación formal¹ pois considero que é fundamental o uso da lingoaxe que permite describir, interpretar e poder coñecer con maior claridade os obxectos de estudio e manipulación, que é outro dos obxectivos xerais da ESO. .

TRASLACIÓNS E XIROS

As traslacións, que son as isometrías máis sinxelas, permítennos introducir directamente a noción de vector, a notación a empregar e a composición de traslacións como unha nova transformación. Para a construción de figuras por aplicación de isometrías, empregamos esencialmente o triángulo pois é mais contrastábel que un simple punto ou segmento e é o polígono máis sinxelo.

¹ incluíndo as notacións $T_{\vec{r}}(A) = A'$, $X_{p,a}(B) = B'$, $S_r(C) = C'$.

Escribimos $T_u^r(ABC) = A'B'C'$

e $\vec{u} = \vec{AA'} = \vec{BB'} = \vec{CC'}$

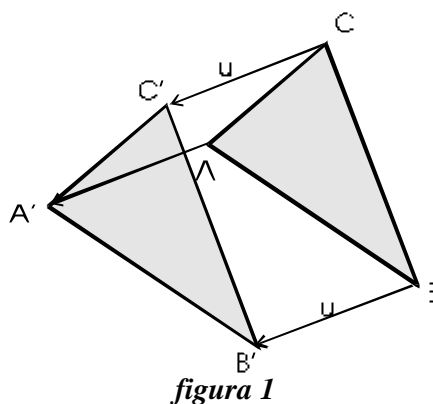


figura 1

Os xiros obrigan a empregar os instrumentos de debuxo cunha certa destreza e a seguir paso a paso as instruccións, incluíndo o código do sentido da medición dos ángulos (sentido que non aparece no transportador o que orixina algúns erros).

$X_{P,30^\circ}(PQR) = P'Q'R'$

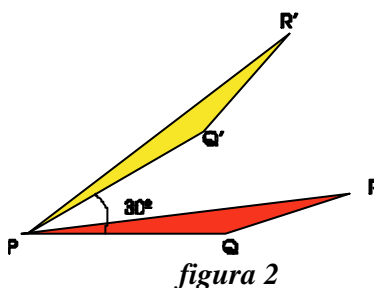


figura 2

Ó realizar a composición de xiros e traslacións obsérvase que estamos diante dunha operación (composición) que non é conmutativa. Coñecer a existencia deste tipo de operadores non é un obxectivo da Secundaria Obligatoria pero, dado que traballan coa composición e que ésta operación non é conmutativa, creo que o profesor non debe "ocultar" esta característica sobre todo a aqueles alumnos que teñen unha curiosidade especial polos obxectos matemáticos. Esto prantexa o debate da diversidade do alumnado. Supoño que o lector sabe que a Consellería de Educación non considerou que o currículo diferenciado en 4º ESO (DCB de Matemáticas) se resolva vía unha separación do alumnado en grupos diferenciados (escollidos polos alumnos previa a orientación do centro) como sí existe no territorio M.E.C. no que se divide a asignatura en Matemáticas A e Matemáticas B. ¿É posíbel, como pretende a Xunta, incluír contidos a maiores na clase?. Na miña opinión esta inclusión vai á costa de que moitos dos alumnos teñan aínda maiores problemas na aula de Matemáticas.

O uso das isometrías permítenlle ó profesor dispoñer dun novo catálogo de problemas nos que a súa resolución esixirá do alumnado o uso de diferentes capacidades humanas: de comprensión lingüística, de formación de imaxes mentais, de razonamento inductivo (Sternberg 1986).

Un pequeno exemplo :

1º Estudia cómo podes levar mediante un xiro, os puntos Q en Q' e R en R'. Centro e ángulo de xiro.

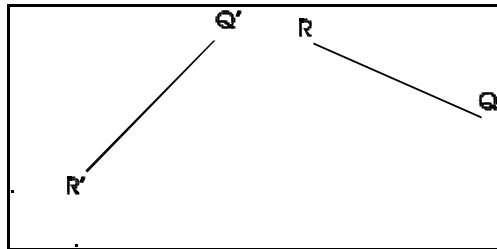


figura 3

2º Busca algunha composición de xiro e translación de maneira que o triángulo ABC vai en A'B'C' por esa composición.

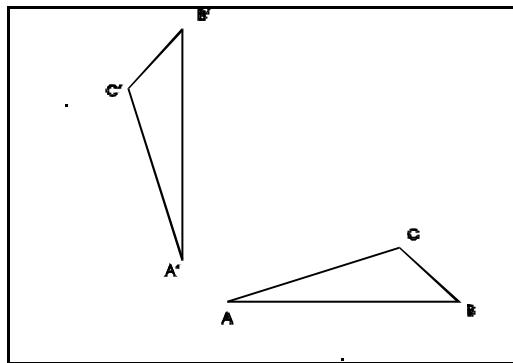


figura 4

3º Completa a figura para que dispoña de simetría de xiro de orden 4.

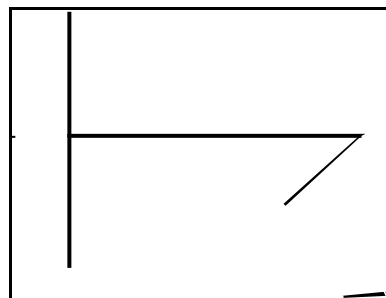


figura 5

SIMETRÍAS RESPECTO DUN EIXO

Podemos observar que o concepto de simetría é un dos mais fructíferos desenvolvidos pola humanidade en toda a súa historia antiga, moderna e contemporánea. A reflexión por simetría ten sorprendido tanto ós nenos pequenos como ós adultos, ás sociedades menos desenvolvidas como ás máis desenroladas, e creo que esta universalidade débese a que actúa sobre o inconsciente que condiciona a nosa forma de sentir a beleza e a armonía, ¡e incluso de razonar!. Son tantos e diversos os exemplos da súa influencia no home que a enumeración sería imposible. Para comenzar podemos lembrar que o comercio con espellos foi un importante negocio dende a época dos fenicios. A simetría nalgunha das súas múltiples facetas tense empregado na pintura, escultura, música, literatura e tamén no cine (lembremos da película Psicosis de Alfred Hitchcock).



Amais das actividades mais ou menos similares ás de xiros e traslacións, analizamos algúns fenómenos ou procesos que gardan unha evidente relación coa simetría: equilibrio, movemento, arte, natureza, matemáticas, sociedade, economía.

Unha primeira parte é de construción das simetrías usando o compás. Pode parecer sorprendente que os alumnos teñan dificultades á hora de construír a simetría respecto dun eixo pero é moi frecuente atopar respostas que sinalan a figura $A'B'C'D'$ como a simétrica de $ABCD$ respecto da recta r . Sin embargo D. Grenier ten probado que esta dificultade ten múltiples motivacións e é xeral a unha boa parte dos individuos.

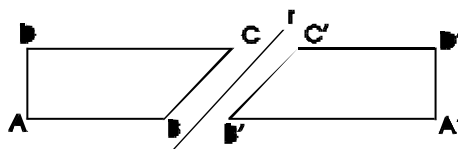


figura 6

Para corregir esta resposta o mais rápido posíbel os alumnos deben comprobar por dobrado respecto do eixo se a solución é correcta. Tamén se recorre a unha solución menos traumática empregando o "reflex" que é un espello semitraslúcido tal que deixa ver a figura orixinal, a resposta do alumno e a solución correcta.

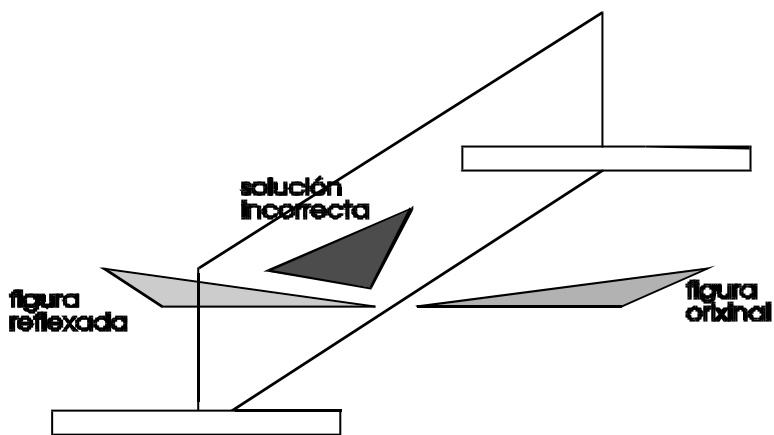


figura 7

Un fenómeno destacado das simetrías é que invirten o sentido de recorrido dunha figura.

Se recorremos a figura $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ imos no sentido inverso ó das agullas do reloxo, pero na figura simétrica, ó recorrela no sentido $A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow D'$ imos no mesmo sentido das agullas do reloxo.

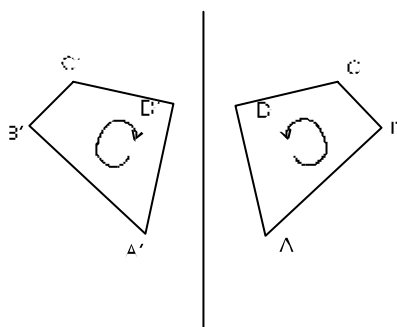


figura 8

Un lunar na cara situado na dereita aparece na esquerda ó reflexarnos no espello.

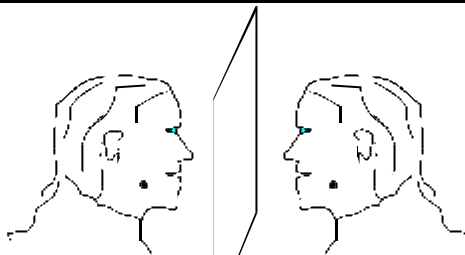
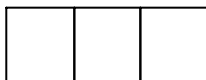


figura 9

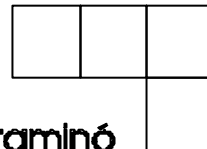
AS SIMETRÍAS E A ECONOMÍA

Dentro das importantísimas aplicacións das "*leis de simetría*" están as que a relacionan coa economía (en todos os campos do coñecemento e da natureza), permitindo a redución de costes por varios motivos. Agora interésannos especialmente a que permite unha redución do tamaño do proxecto en relación ó tamaño da obra a construír.

Un **triminó** é una figura formada por tres cadrados de maneira que todo cadrado ten polo menos un lado común con outro dos cadrados. Se son catro cadrados temos un **tetraminó**.



triminó



tetraminó

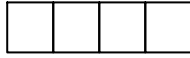
Un **pentaminó** constrúese con cinco cadrados. Despois están os **hexaminós**, **heptaminós**, e **poliminós** en xeral para calquera n .

¿Cántos tetraminós e pentaminós hai?

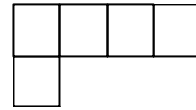
A tarefa de atopar todos os tetraminós é doada. Pero a de construír os pentaminós sen repetir ningún nen esquecerse de ningún é moito máis complexa. Para conseguilo podemos empregar algunhas técnicas que son extensible a outro tipo de problemas. Entre elas temos as de:

- Construír os pentaminós a partir dos tetraminós.
- Observar que moitas das formas de obter un pentaminó a partir dun tetraminó repítense.

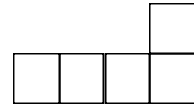
Así, a partir do tetraminó



e engadindo 1 cadrado aparecen os tetraminós

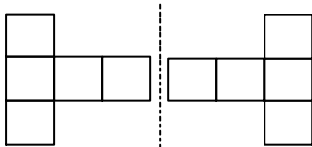


e

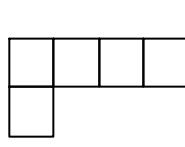


que son coincidentes logo dun simple movement.

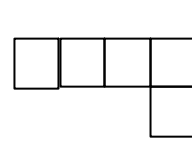
Aínda con estas consideracións aparece un gran número de pentaminós que se repiten. ¿Podéramos reducir aínda máis?. Podemos observar que, atendendo á simetría, existen pentaminós de dous tipos : os simétricos respecto dun eixo e os que nono son. Se "damos a volta" a un pentaminó que ten un eixo de simetría, o resultado mediante un movemento pode facerse coincidir con il mesmo. Pero de facermos esta operación con outro que nono é, ¿xorde un novo pentaminó!².



pentaminó simétrico : $S_f (P) = P$



pentaminó non simétrico : $S_f (P) \neq P$



Por cada poliminó non simétrico, hai outro como il pero "dado a volta". En certa forma un e outro están ligados por unha relación moi forte e en moitos aspectos *forman unha unidade*". Se xeneramos os pentaminós a partir dos tetraminós simétricos e só 1 por cada par de non simétricos, estes permitiránnos construír todos os pentaminós, con só facer un duplicado de cada pentaminó non simétrico que apareza. Isto permite observar que a simetría permite introducir un elemento de economía moi forte pois con relativamente pouca información podemos "reconstruír" o resto. ¿Cantos hexaminós hai?. Naturalmente só empregaremos un pentaminó por cada par de pentaminós non simétricos : calquera cadrado que se lle engada a un non simétrico pode substituírse polo simétrico desa operación no seu simétrico.

Se pensamos na utilidade da simetría na economía observamos exemplos na arquitectura. ¿cántos cálculos se reducen se consideramos un edificio con

² na medida que aceptemos implícitamente como criterio para a igualdade de pentaminós que sexan superponíbeis sen movelos do plano.

diferentes simetrías?. Outro exemplo atopámolo nos seres vivos. ¿A qué se debe a gran cantidade de simetrías dos seres vivos?. En xeral podemos dicir que se basa en dous fenómenos. O primeiro ten que ver coa estabilidade da construción que permite reducir custos estruturais. O segundo e as veces menos coñecido ten que ver coa sinxeleza do que, usando unha terminoloxía de informática diríamos o "*programa*" ou código preciso para a súa construción.

Pensemos os nosos ollos. A diferenza do que moita xente pensa, os ollos son moito máis que unha sinxela cámara fotográfica : cada un deles posúe un complexo sistema neuronal previo ó nervio óptico polo que vai a información moi dixerida para que o cerebro continúe a procesala. Esta especialización do ollo, esixe un "*programa moi complexo*" que se atopa no código xenético en forma de ADN. Chegar a obter un órgano tan especializado como é o ollo esixiu moitos millóns de anos de modificacións xenéticas das que só as mellores poideron continuar a traveso dun lento e costoso proceso de selección. A gran ventaxa de ter dous ollos simétricos é que co mesmo trozo de ADN temos a información xenética dos dous ollos. Se consideramos animais moi inferiores, como as medusas, obtemos este principio aplicado practicamente ó límite: é tal a simetría que só compre unha información pequenísima para que quede completamente codificado.

OUTROS USOS DA SIMETRÍA. CONCLUSIÓNS

Atopamos a simetría na natureza do infinitamente pequeno (antipartículas, quarks), nas moléculas (máis sinxelas como o diamante e complexas como os polímeros), en todos os seres vivos. É de destacar que os máis sinxelos (virus, bacterias, radiolarios) teñen moita máis simetría que as criaturas máis complexas. Evidentemente unha maior especialización de distintos órganos vai en contra da simetría. Amais non podemos ter a cabeza nos pés porque só no caso dos individuos máis primitivos a diferenza entre arriba-empaixo é desprezable.

Tamén a nivel moitísimo maior aparece a simetría, podendo observalo nos planetas, estrelas, galaxias. Incluso tense conxeturado a existencia doutro universo de antimateria simétrico do noso Universo.

Os humanos empregamos a simetría en multitude de tarefas. Os nosos edificios, móbeis, obras de arte e incluso na nosa mentalidade (bón-mao) e o propio coñecemento (para o lector lembreille a categoría dual) atopamos exemplos da fecundidade deste concepto. Así, propoñolles ós alumnos que indiquen unha relación de elementos construídos con simetría : na súa casa, na cidade, noutras obras de Arte fora de Santiago, para comprobar o éxito que a simetría ten, tamén, nas actividades humanas.

Como rápida conclusión, creo que os alumnos poideron tirar proveito das clases que se adicaron ás isometrías. Aínda que as isometrías dan xogo para moitísimo máis, considero que esta unidade servíulles en gran medida para

considerar algúns aspectos do curriculum que non se consideran practicamente no resto das unidades, tanto a nivel de obxectivos xerais como outros máis específicos. Creo que é importante que os alumnos poideran aprender, entre outras tarefas consideradas na unidade, a realizar correctamente as isometrías seguindo detalladamente unha serie de instrucións, a razonar empregando motivos de simetría, a buscar xeitos de simplificación e de xeneralización de problemas, e a valorar a importancia da simetría na arte, na natureza e no coñecemento.

BIBLIOGRAFÍA:

Colera J et al. *Matemáticas 4ªA*. Ed. Anaya Madrid., 1995.

Grenier D. 1985, "Middle school pupils" conceptions about reflections according to a task of construction. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Educations*. Noordwijkerhout, pp 183-188.

Museu de la Ciència : *Fascinant Simetría*. Fundació Caixa de Pensions. Barcelona 1988.

Tarasov L. *This Amazingly Symmetrical World*. Mir Publishers Moscova 1986