OPINIÓN

PAPEL DOS MÉTODOS ALXEBRAICOS NO ENSINO SECUNDARIO ¿ESQUECEN OS ALUMNOS A ÁLXEBRA?

CACHAFEIRO CHAMOSA, Luis Carlos
I.B. Pontepedriña"- SANTIAGO DE COMPOSTELA

O paso da aritmética á álxebra ten unha importancia grande dentro da historia das matemáticas e tamén a tén dentro do sistema educativo. Como veremos a álxebra non é unha *"aritmética extendida"*. Tamén veremos que os métodos de resolución dun problema dunha forma alxebraica difiren e poden resultar máis doados que o correspondentes métodos aritméticos. Esta millora faise notoria na fase de prantexamento dado que os métodos alxebraicos van ser máis xerais que os aritméticos. Moitos problemas resoltos de distinta forma a nivel aritmético son prácticamente idénticos dende un punto de vista alxebraico.

Dentro das causas do avance da matemática no século XVII podemos incluir a potencia do cálculo alxebraico que deu pé ó nacemento e desenrolo da xeometría analítica. Esta substituíu á xeometría euclídea en todo o sistema educativo na segunda metade deste século. A corrente da *"Matemática Moderna"* criticaba a complexidade instrumental dos métodos empregados na resolución clásica de problemas xeométricos fronte á sinxeleza dos métodos alxebraicos. Aínda que se pretendía unha aparente simplificación da matemática educativa, na práctica produciuse a incorporación de moitos novos conceptos pretendidamente básicos, a aparición de símbolos con pouco significado para o alumnado e un bon número de probas moi afastadas da experiencia sensible.

Logo do aparente éxito da Matemática Moderna, houbo unha etapa de crítica ó abuso da formalización da xeometría rexeitándose non só a total alxebrización da xeometría, senon tamén cuestionando o peso do cálculo alxebraico tendo en conta que moitos dos métodos de cálculo se atopan incorporados ó cálculo simbólico de ordenadores e de calculadoras programables.

Neste traballo gustaríame facer unha reflexión en voz alta sobre a importancia e a oportunidade do estudio da álxebra a nivel de secundaria.

A álxebra tense considerado como unha xeneralización da aritmética, extendendo o uso de operacións numéricas a expresións con literais. Sin embargo e como analizan Socas e outros [Socas, Palarea 97], a álxebra difire notablemente da aritmética nalguns aspectos que por pasar, xeneralmente, desapercibidos para os alumnos representan unha notable fonte de erros. Por exemplo, a nivel de aritmética a expresión $5x + 3y$ pode representar cinco obxectos do tipo x máis tres obxectos de tipo y, o que veñen ser oito obxectos dun tipo común ("x ou y"). René Thom chega a considerar como perxudiciais o uso na aula de expresións deste tipo por reunir obxectos con cualidades diferentes sinalando que non só carece de sentido senon que poden supoñer un "perigo para o equilibrio intelectual dos nenos" [Thom78].

Amais da importante diferencia conceptual entre a aritmética e a álxebra, os métodos de resolución alxebraicos difiren moito dos correspondentes métodos artiméticos. Poñamos un exemplo:

Problema 1 [Fernandez 97]. Se tres gomas e dous clips miden dezaoito centímetros e dúas gomas e un clip miden once centímetros, ¿canto mide cada goma e cada clip?.

Un resolución baseada no método aritmético é a seguinte :

Solución 1.1. Se 3 gomas e 1 clip miden 18 cm e

2 gomas e 1 clip miden 11 cm

entón 1 goma e 1 clip miden 18 -11 cm = 7cm

entón 1 goma mide 11 - 7cm = 4cm e

entón 1 clip mide 7- 4cm = 3 cm

difire notablemente da alxebraica:

Solución 1.2. Se x é a medida en centímetros de cada goma e y a medida en centímetros de cada clip podemos escribir as ecuacións .

$3x + 2y = 18$

$2x + y = 11$

Resolvendo a ecuación (e.g. por substitución) obtemos os valores $x = 4$ e $y = 3$ de onde deducimos que cada goma mide 4cm e cada clip 3cm..

Este exemplo móstranos que, na aritmética, as unidades están moi próximas ó propio método de razonamento, mentras que na álxebra as unidades desaparecen do problema e só aparecen na expresión final colocadas usando un procedemento "non alxebraico. Sen ser exhaustivos, podemos atopar outra moi notábel diferencia entre a aritmética e a álxebra no uso do símbolo = [Socas, Palarea 97]. Na aritmética, o símbolo da igualdade emprégase para separar dúas

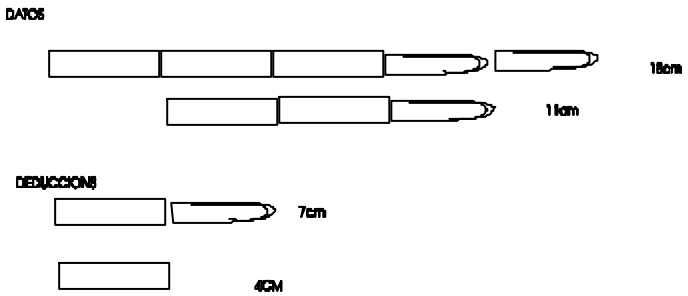
expresións diferentes do mesmo número mediante reducción dunha á outra. Na álxebra o símbolo = emprégase tamén nese sentido pero hai outro moitísmo máis potente que é o que permite producir novos obxectos da forma A=B. A comunicación presentada por Rodríguez-Moldes no X Congreso de Enciga presenta unha forma interesante de axudar ós alumnos a resaltar a diferencia entre as expresións e as igualdades [Rodriguez-Moldes 97].

As posibilidades que proporciona a álxebra coa construcción destes novos obxectos (ecuacións) son enormes. Co predicado de igualdade, poden introducirse gran número de teorías de xeito formal e abre o camiño da axiomatización da xeometría. Unha xeometría virá dada mediante uns obxectos e igualdades entre eles, os axiomas. Os impulsores da Matemática Moderna agardaban que a Xeometría poderíase convertir nun sistema de cálculo, eliminando a *"obscuridade"* dos métodos xeométricos. É certo que ó reducir moitos dos problemas de xeometría a un cálculo afórrase tempo e traballo se ademais dispoñemos de ferramentas potentes de resolución como programas de cálculo simbólico (exemplo o *Mathematica*).

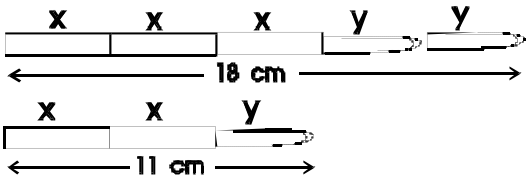
Aínda que se empreguen os programas de demostración automática, soen precisarse algúns resultados coñecidos para poder avanzar na solución correcta. Polo tanto precisamos non só de ferramentas de cálculo, senon tamén de resultados previos que nos axuden na búsqueda dos millores camiños. Pero a existencia de métodos cada vez máis potentes de cálculo e deducción está a reducir os coñecementos necesarios para abordar os problemas. Na miña opinión este feito tivo, ten e terá consecuencias dramáticas para a importancia social das matemáticas.

A álxebra permite, unha vez se teña formalizado o problema, esquecernos do significado e centrarnos exclusivamente no cálculo. No caso doutros procedementos hai que *"conservar o control do problema"* en prácticamente todas as etapas. Estes outros métodos de resolución "compiten" cos alxebraicos e non sempre en peores condicións. Por exemplo para o problema anterior, podíamos empregar tamén unha deducción usando debuxos e tamén combinando métodos simbólicos e gráficos,. Por exemplo un método xeométrico de resolver o problema anterior é :

Solución 1.3.



Solución 1.4.



Outro método é o de ensaio-erro, que matemáticamente falando soe ser máis pobre que os outros, pero que é moi válido en moitos campos da vida, por exemplo cando imos eliminando as solucións ou alternativas menos válidas. No caso dos problemas numéricos a búsqueda redúcese frecuentemente ás solucións naturais e con valores non excesivamente grandes.

Por exemplo aquil problema pode resolverse usando unha táboa de doble entrada

Solución 1.5.

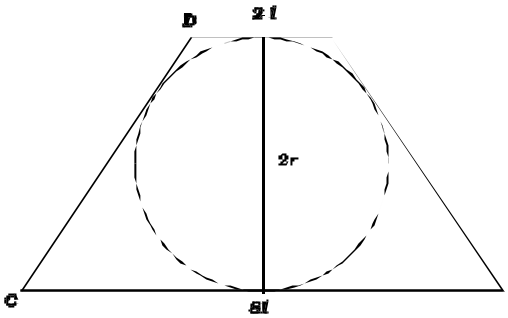
Goma	***clip***	***tres gomas e dous clips***	***dúas gomas e 1 clip***
2	3	12	7
3	2	13	8
3	3	15	9
...	...	...	...
4	3	18	11

O método alxebraico é moi portable no sentido de que depende pouco dos datos específicos do problema (tipo de números, relacións entre os datos) sendo mais potente, conciso e aparentemente afastado da experiencia sensible que os outros amais de conquerirse con il unha economia de pensamento notoria. Esta economía de pensamento pode parecer unha vantaxe pero ¿sempre será millor resolver os problemas pensando menos?

Cando queremos resolver un problema podemos estudiar con detalle os datos do problema e buscar un método que se adapte a esas características empregando relacións específicas para eses datos, aproveitar a información oculta ou usar empregar un método moi sofisticado e no que eses detalles non sexan relevantes. Aínda que a álxebra emprega un método de resolución moi potente, non sempre é unha garantía de obter unha solución por un camiño curto.

Esto vese no seguinte problema sacado dun libro de 1º de Bup:

Problema 2. [Lazcano, Barolo 78]. Nun trapecio isósceles a base menor é a cuarta parte da base maior. O trapecio está circunscrito a unha circunferencia. Determina-los lados do trapecio sabendo que o perímetro é de 96cm.



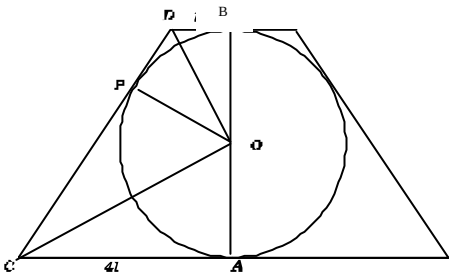
Chamamos l a mitade da base menor e r o radio da circunferencia.

Solución 2.1 (analítica). Podemos considerar o centro da circunferencia de coordenadas *O(0,0)*. Como *r* é o radio temos que un lado terá de ecuación $\frac{x+l}{3l}=\frac{y-r}{2r}$ ou o que é o mesmo *2rx - 3ly +5lr=0,* de onde deducimos, como a distancia da recta a O é *r,* que $\frac{|5lr|}{\sqrt{4r^2+9l^2}}=r$. Resolvendo esta ecuación obtemos o valor *r = 2l.* O outro lado pódese obter como a distancia entre dous puntos e polo tanto $d(C,D)=\sqrt{9l^2+4r^2}=\sqrt{25l^2}=5l=\frac{96-10l}{2}$. Resolvendo esta ecuación temos *l=4,8* a base menor é *9,6 cm* a maior *38,4 cm* e os outros lados miden *24cm.*

Unha alternativa que non utiliza prácticamente a álxebra pero emprega recursos máis adaptados ó problema é a seguinte :

Solución 2.1 (sintética).

Trazamos os segmentos OC, OD e OP atopamos directamente a solución. Usando a semellanza dos triángulos OAC e OPC e tamén de OBD e OPD resulta que a medida do lado igual é *l+ 4l = 5l.* Polo tanto a mitade da base menor mide 96/20cm de onde deducimos xa o valor dos outros lados.



Parece inevitábel que na maior parte dos casos busquemos facer as cousas de maneira o máis sinxela posíbel. Pero atopamos que non sempre o aparentemente máis sinxelo chega realmente a selo. A nivel alxebraico a fase de

prantexamento pode ter certas dificultades para algúns alumnos que tenden a confundir o significado de cada literal e, como vimos, tamén pode facerse moito máis complexo que o que era de esperar. O apoio gráfico pode axudar moito na fase de prantexamento pero unha boa parte dos alumnos soen rexeitalo con frases como *"custame traballo velo no debuxo"* "non son dado ós gráficos" etc.

Cecais estamos diante ou ás portas dunha nova etapa no que compete ás distintas formas de razonamento e xorden unha serie de preguntas de difícil resposta: ¿Qué matemáticas e qué xeito de facer matemáticas serán necesarias no futuro?. ¿Qué porcentaxe de individuos precisan alta, media e baixa cualificación en matemáticas? ¿Poden as matemáticas quedar como un referente esencialmente cultural para a maioría da poboación se as necesidades de coñecemento matemático se reducen notablemente?.

Nunha tese recente, Fernández Garcia [Fernández 97], móstranos os resultados dun traballo sobre a relación entre a forma de prantexar os problemas de índole aritmético e o resultado final. Pasou unha serie de dez problemas tanto a alumnos de 4º ESO como a estudiantes universitarios de dous tipos un grupo que levaban máis de 3 anos sen estudiar Matemáticas .e outro grupo que levaba máis de 5 anos. Algúns das conclusións atopadas son:

a) Os métodos de resolver os problema pódese encadrar en cinco tipoloxías -parte-todo, ensaio-erro, simbólico, simbólico-gráfico e gráfico.

b) Os alumnos empregan esencialmente un mesmo método para case todos os problemas.

c) O maior éxito tanto na fase de prantexamento como na de resolución aparece vencellado a dous factores :

1) a madurez do estudiante, aínda que neste caso signifique máis tempo sen estudiar Matemáticas.

2) o uso sistemático de métodos alxebraicos acompañando do maior éxito na resolución aparecen tamén outra serie de fenómenos colaterais : conservan moito a tipoloxía (non cambian de método tanto como os outros) o significa que se fixeron moi independentes das características particulares dos enunciados e amais deixan menos problemas sen resolver. Son máis críticos cos outros sistemas, rexeitándoos por diversas razóns como por empregar números que non son datos do problema, por un excesivo coste en tempo, ou baixa fiabilidade, necesidade de realizar debuxos etc. Amais aínda aceitando a posibilidade de empregar outros métodos soen insistir no interese do método alxebraico. Son pois máis conscientes da potencia deste.

Eu creo que estos resultados son bastante significativos e cecais poideran sorprender a algúen pois non fai moito tempo escoitamos en diversos foros falar en contra do rigor matemático e da formalización e creo que un feito importante que se demostra (con todas as excepcións das características da investigación pois non é naturalmente un teorema matemático), é que os alumnos que foron conscientes da potencia do método alxebraico conseguiron que lles quedara ben conservado na memoria producíndose incluso unha sedimentación co paso do tempo que redunda na millora nos resultados, sendo éstos millores para o grupo que leva máis anos sen estudiar Matemáticas.

En consecuencia, creo que debemos recoñecer o mérito da simplicidade e da portabilidade da álxebra. Naturalmente que deste xeito estamos a facer innecesario o uso doutros recursos que, como vimos, poden ser útiles nalgúns problemas. ¿Qué causas favorecen estes resultados?¿ten que ver cos estudios de Matemáticas nas etapas anteriores?. Penso que o feito de ser unha parte importante dos programas do ensino secundario e do bacharelato condiciona unha millora dos seus resultados pois é o que se ten máis fresco. Pero tamén esa sinxeleza repercute na ocultación de matices. ¿Para qué quero atender a outro tipo de criterios se me vale case que sempre?.

Por último quixera concluir que un dos grandes logros é o da confianza e comodidade para o alumno. O alumno sabe que se prantexou ben as ecuacións pode esquecerse do resto da información e confiar no método de resolución (aínda coa pega do problema). Para sustituilo por outro sistema debe requerirse que satisfaga alomenos os seguintes requisitos: portabilidade (resolva un número amplo de casos), seguridade (nonos atascamos en seguida) e éxito nunha porcentaxe alta de casos se se cumplen as reglas anteriores.

BIBLIOGRAFÍA.

[Fernandez 97] Fernandez García, Francisco. Evaluación de competencias en Álgebra elemental a través de problemas verbales. Tese doutoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada 1997.

[Rodriguez-Moldes 97] Rodriguez-Moldes, Covadonga. Simulación dun campeonato de polinomios. Boletín das Ciencias nº 32. Pp 41-45, 1997.

[Lazcano, Barolo 78] Lazcano Ignacio, Barolo Paolo. Matemáticas 1º BUP Ed. Edelvives. Zaragoza 1978.

[Socas, Palarea97] Socas M.M. , Palarea M.M. Las fuentes de ssignificado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Nº 14, pp7-24, 1997.

[Thom78] Thom, René. ¿Son las matemáticas “modernas” un error pedagógico y filosófico?. En J. Piaget et al La enseñanza de las matemáticas modernas. Alianza Editorial 1978.