EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

UNHA APLICACIÓN DA SIMETRÍA Ó ESTUDIO DA PARÁBOLA

GREGORIO MONTES, Antonio
I.E.S. Porta da Auga - RIBADEO (A CORUÑA)

Repasando un vello boletín de Enciga atopéime cun par de preguntas: '¿por tres puntos distintos pasa sempre unha parábola? e, nese caso, ¿seria esta única?».

A resposta, razoada dun xeito que considero riguroso, pode resumirse con outra cita do mesmo texto: 'por tres puntos distintos non aliñados, non estando dous deles nunha mesma vertical, pasa unha e só unha parábola'.

Chegado a este punto, e á vista dunha das ilustracións gráficas do artigo, non me parece a solución adecuada. Sen embargo, comprobei que a resposta nos libros de texto do ensino medio vén sendo a mesma, se ben dada a partir doutros métodos diferentes. O mesmo repítese en manuais universitarios.

De calquera xeito, e fronte ó material consultado, atopei un punto que me alentou a seguir adiante. No artigo referido, dous dos puntos dados non deben de estar na mesma vertical; do contrario non existe unha parábola que inclúa os tres.

Sen embargo, a vertical, dun xeito xeométrico, vén referida ós eixes de coordenadas. En concreto, nun sistema de eixes cartesianos definidos nun plano, unha vertical sería unha paralela ás ordenadas ou, de xeito equivalente, perpendicular ás abcisas. E, ¿se escollemos un conxunto de eixes xirado respecto ó anterior? Nese caso os mesmos dous puntos xa non estarían nunha mesma vertical e a conclusión do artigo non sería aplicable.

Recóllendo as ecuacións das parábolas que aparecen nos textos, atopamos como ecuación $x^2=2py$ (ou $y^2=2px$, se se colle unha parábola «deitada»), onde p é o parámetro, isto é, a distancia entre a recta directriz e o foco. Neste caso, a directriz é unha recta horizontal (de xeito respectivo, vertical), o vértice está na orixe de coordenadas e o eixe coincide co eixe de

ordenadas (resp., de abcisas). A ecuación así presentada é unha ecuación reducida. No caso do artigo citado, escolle a definición de parábola como unha función $f(x) = ax^2 + bx + c$, algo máis complicada que a anterior ecuación reducida e que implica, por exemplo,

1. O vértice da parábola é un punto no que se cumpre $dy/dx = 0$ (na ecuación reducida entre paréntese, cumpria $dx/dy=0$).
2. O vértice é o punto $(-b/2a, c+b^2/4a)$, en troques do (0,0) correspondente á ecuación reducida
3. O eixe é a recta $x=-b^2/2a$, en troques das rectas $y=-p/2$ ou $x=-p/2$ para as formas reducidas.

Podemos entón chegar a que, as parábolas definidas cunha función desta forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (chamémoslles parábolas px2) son un conxunto infinito do que formaría parte o subconxunto, tamén infinito pero dúas ordes inferior, de parábolas definidas mediante a relación $y=x^2/2p$ (parábolas px0). Asemade px2 é subconxunto do conxunto total de parábolas do plano, pxy, que é un infinito de orde superior.

Recapitulemos. Chamei px0 ó conxunto de parábolas con vértice na orixe e directriz paralela ó eixe de abcisas (eixe x). Segundo esta nomenclatura, px1 serían as parábolas con directriz paralela ó eixe de abcisas e vértice situado no eixe de ordenadas. px2, o conxunto das que teñen directriz paralela ó eixe de abcisas e vértice en calquera lugar do plano. Evidentemente, quedan aínda fóra da definición aceptada no artigo citado tódalas parábolas que teñen directrices non paralelas ó eixe x. px2 é o conxunto de parábolas que resultan dunha traslación das parametrizadas como px0. Así, resulta evidente que calquera das parábolas pertencentes a px2 non poda incluír dous puntos na mesma vertical, pois ningunha tanxente a elas chega a ter unha pendente infinita en relación ó eixe x. Agora ben, se retamo-los eixes...

No caso de serlle aplicada unha rotación á parábola (ou de xeito equivalente, de rotar os eixes e polo tanto a referencia de verticalidade), unha parábola pertencente a px2 pasa a ser descrita por unha función máis xeral, pertencendo entón a pxy, o conxunto máis xeral. E nese caso, o formular a resposta en base á verticalidade entre dous puntos carece de sentido. Máis aínda, tres puntos non aliñados non determinan unha soa parábola, senón tres diferentes.

‘ ANTON LABRANA, «Unha aplicación das matrices ó estudio da parábola», Boletín das Ciencias, ano VII, n° 21, xaneiro 1995.

Un exemplo:

Sexan os puntos de coordenadas

$$(0,-1);\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Neste caso, as parábolas seguintes pasan polos tres puntos.:

1) $y-2x^2+1=0$ (a solución tipo px) Esta parábola ten como foco (0,-0'875) e como directriz y+1'125=0. Como os tres puntos escollidos tañen simetría ternaria por rotación arredor do (0,0), tamén tañen que ter outras dúos parábolas que pasen polos tres puntos, simétricas á anterior, ó aplicarlle a mesma transformación de rotación ternaria. Estas serán:

2)

$$-\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}2}{}x-2\left[\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right]^2+1=0$$

3) que se pode comprobar que ten forma de parábola, a pesar de non parecerse moito a unha ecuación reducida

$$-\frac{y}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-2\left[\frac{-1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right]^2+1=0$$

simétrica á anterior tendo como eixe de simetría a recta x=0

Os tres focos respectivos as parábolas anteriores constitúen os vértices dun novo triángulo equilátero, e as tres rectas directrices córtanse con ángulos de 60°, inscribindo os vértices e os focos noeutro triángulo equilátero.

O que se di respecto a estas tres puntos, por traslación, rotación e / ou cambio de escala pódese trasladar a calquera terna de puntos do plano que formen os vértices dun triángulo equilátero.

As parábolas anteriores non son as únicas que pasan por eses tres puntos, senón que hai unha infinidade delas. É tóxico pensar así, pois se tres puntos que nun sistema de coordenadas veñen representados por (m, n), (r,s) e (t, u) definen unha parábola que corresponda cunha función f(x) = ax + bx + c, ó realizar un xiro calquera sobre o sistema de coordenadas, os mesmos tres puntos virán representados por (m, n), (r',s') e (t', u') e teremos definida unha nova función para unha parábola correspondente, $f(x') = a'x'^2 + b'x' + c'$

¿Por que sucede isto? Unha pista: ¿Cantas solucións diferentes ten o sistema de ecuacións formado coa substitución das coordenadas dos tres puntos nas relacións que dan orixe á única definición xeral de parábola[2]?

Mentres, penso que a explicación sobre o tema da parábola xa resulta abondo complexa sen complícala máis facendoa extensiva á xeralidade das parábolas. O que si conviría é desterrar a idea errónea de que por tres puntos non aliñados pasa unha soa parábola. Só hai que aclarar que é unha se se considera a directriz paralela a un determinado eixe de coordenadas que, á súa vez, non sexo perpendicular a unha recta que pase por dous dos puntos dados.

Agradezo a Ana García Martínez a colaboración prestada ó longo da xestión deste artigo.

‘ Lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dun punto e dunha recta.