CASOS IDEAIS E APROXIMACIÓNS REAIS EN FÍSICA

VIDAL, Antonio
IES Rosalía de Castro
SANTIAGO DE COMPOSTELA

Atopámanos en Física, as veces, con casos ideais: dunha banda, temos o caso das leises ideais (como a lei da inercia ou as leises dos gases ideais) que representan unha transrealidade ou realidade condicional (se se cumplira ...); doutra banda, os problemas idealizados que, se non responden a ningunha situación real, teñen aproximacións axeitadas dentro dunha marxe de error pequena dabondo. O caso do cálculo da intensidade de campo eléctrico creada por unha distribución finita filiforme é un exemplo desta derradeira situación.

Pra facer a analise do grao de aproximación do caso real, analizemos primeiramente o caso ideal dun fío de lonxitude infinita, cargado cunha densidade lineal de carga constante. O cálculo do valor da intensidade de campo eléctrico nun punto a distancia a do fío, é sinxelo aplicando o teorema de Gauss:

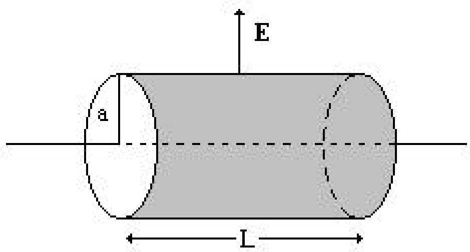

Fig. 1

en efecto, dada a simetría, a intensidade de campo só tén compoñente perpendicular ó fío, cumplíndose que o fluxo a través da superficie cilíndrica gaussiana é

$$\Phi = \oint \vec{E}.\vec{dS} = \int_{S.lateral} EdS = 2\pi aLE = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

de donde,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{2K\lambda}{a} \quad (1)$$

onde K é a constante de Coulomb.

No caso dun fío de lonxitude finita, L, as compoñentes do vector intensidade do campo eléctrico nun punto a distancia a do mesmo e situado na mediatriz do fío (Fig.2), son

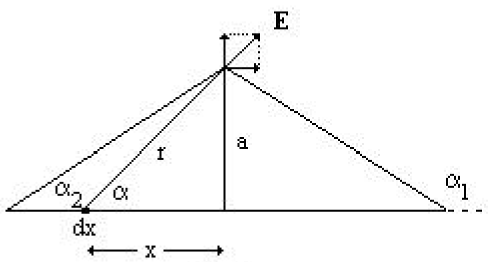

Fig. 2

$$E_x = \int dE_x = 0$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE sen\alpha = \int \frac{K\lambda dx}{r^2} sen\alpha$$

tendo en conta que

$$r = \frac{a}{sen\alpha}$$

$$x = a.cotg\alpha$$

$$dx = -\frac{a d\alpha}{sen^2\alpha}$$

resulta

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{K\lambda \operatorname{sen}\alpha . d\alpha}{\alpha} = \frac{K\lambda}{a}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

e como

$$|\cos\alpha_1| = |\cos\alpha_2| = \frac{\frac{L}{2}}{\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$E = \frac{K\lambda L}{a\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

A cuestión que nos podemos plantexar agora é cando se pode tomar a ecuación (1) en lugar da (2). O erro relativo correspondente será

$$e = \frac{\frac{2K\lambda}{a} - \frac{K\lambda L}{a\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{K\lambda L}{a\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}} = 2\frac{\left(\frac{L^2}{4} + a^2\right)^{\frac{1}{2}}}{L} - 1$$

Se consideramos que a distancia a é unha fracción da lonxitude L do fío, $a = \frac{L}{n}$, o erro relativo resulta

$$e = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \qquad (3)$$

expresión que nos vai permitir coñecer a fracción exixible para "a" respecto a lonxitude "L" cando queramos un erro inferior a unha determinada cantidade. Nunha folla de cálculo podemos obtér os valores do erro, expresado en tanto por cento, fronte a correspondente fracción da distancia respecto da lonxitude:

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18
100e	41,42	11,80	5,41	3,08	1,98	1,38	1,02	0,78	0,62

A observación destes valores nos vai permitir afirmar que a ecuación correspondente ó caso ideal do fío de lonxitude infinita se pode aplicar a partires dun valor de "a" equivalente á décima parte da lonxitude do fío (a = L/10), correspondente a un erro relativo inferior ó 2 %, o que implicaría unha variación máxima de dúas unidades na terceira cifra significativa, o que é unha apreciación dabondo boa. Nos cálculos habituáis se pode incluso admitir un erro mais grande, e, polo tanto, unha fracción mais cativa.

Imos ver agora canto se pode desprazar o punto, en relación a mediatriz do fío, sen que se esté a cometer un erro apreciable. A determinación do verdadeiro valor da intensidade do campo eléctrico non é tan xinxela como no caso anterior e a determinación do erro é bastante mais complicada. Para a resolución do problema, consideraremos en primeiro lugar o campo creado pola parte de fío que equidista do punto considerado (AB, na figura 3); despois, determinaremos o campo creado polo resto do fío (BC, na figura).

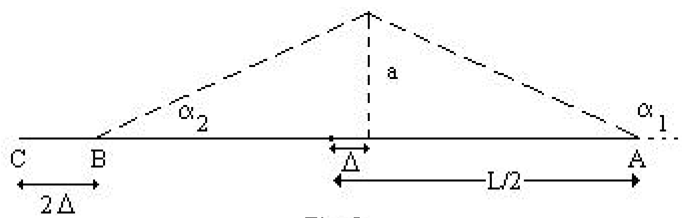

Fig. 3

A carga correspondente ó tramo AB crea un campo con só compoñente perpendicular ó fío e de valor

$$E_1 = E_{1,y} = \frac{K\lambda}{a}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right) = \frac{K\lambda}{a}\frac{L - 2\Delta}{\left[a^2 + \left(\frac{L}{2} - \Delta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (4)$$

A carga do tramo BC crea un campo cuias compoñentes serán

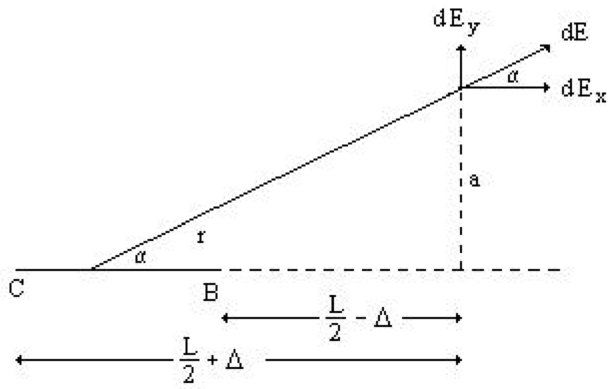

Fig. 4

$$E_{2,x} = \int dE\cos\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \frac{K\lambda dx}{r^2} = \int_{x_1}^{x_2} K\lambda \frac{dx}{x^2+a^2}\frac{a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int_{x_1}^{x_2} K\lambda \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \left[-\frac{K\lambda}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x_1=\frac{L}{2}+\Delta}^{x_2=\frac{L}{2}-\Delta} = K\lambda\left\{\frac{1}{\left[a^2+\left(\frac{L}{2}-\Delta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[a^2+\left(\frac{L}{2}+\Delta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \qquad (5)$$

Esta integral resólvese facendo o cambio de variable x = a.tgθ:

$$dx = \frac{ad\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^3}{\cos^3\theta}$$

$$\int K\lambda a \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int K\lambda a \frac{\frac{ad\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{a^3}{\cos^3\theta}} = \int K\lambda \frac{\cos\theta d\theta}{a} = \frac{K\lambda}{a}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\theta}^{\theta_2}$$

e como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$, queda

$$E_{2,y} = \frac{K\lambda}{a}\left[\frac{x}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x_1=\frac{L}{2}-\Delta}^{x_2=\frac{L}{2}+\Delta} = \frac{K\lambda}{a}\left\{\frac{\frac{L}{2}+\Delta}{\left[a^2+\left(\frac{L}{2}+\Delta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{L}{2}-\Delta}{\left[a^2+\left(\frac{L}{2}-\Delta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} \quad (6)$$

Se pensamos que para determinar o erro cometido é necesario coñecer o valor da intensidade real do campo coa relación $E = \sqrt{\left(E_{1,y}+E_{2,y}\right)^2 + E_{2,x}^2}$, a complexidade das fórmulas (4), (5) e (6) mesmo botan para atrás. Ademáis, obsérvase que o valor verdadeiro da intensidade de campo vai depender non só do desprazamento arredor do centro do fío, D, senón tamén da distancia ó mesmo na que consideramol-o campo, a. Co fin de simplificar o problema, para a exixiremos un erro inferior ó 2 %, puidendo tomar entón o valor a = L/10. Se consideramos o valor de D como unha fracción da lonxitude do fío $\Delta = L/n$, o problema simplifícase. Abonda agora considerar diferentes valores de n para calcular o erro introducido. Así para n = 10, temos

$$E_{1,y} = \frac{K\lambda}{\frac{L}{10}} \frac{L-2\frac{L}{10}}{\left[\left(\frac{L}{10}\right)^2+\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{10}\right)^2\right]} = 19{,}40285\frac{K\lambda}{L}$$

$$E_{2,y} = \frac{K\lambda}{\frac{L}{10}}\left\{\frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{10}}{\left[\left(\frac{L}{10}\right)^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{L}{2}-\frac{L}{10}}{\left[\left(\frac{L}{10}\right)^2+\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{10}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} = 0{,}16251\frac{K\lambda}{L}$$

$$E_x = E_{2,x} = K\lambda\left\{\frac{1}{\left[\left[\left(\frac{L}{10}\right)\right]^2+\left(\frac{L}{2}-\frac{L}{10}\right)^2\right]} - \frac{1}{\left[\left(\frac{L}{10}\right)^2+\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{10}\right)^2\right]}\right\} = 0{,}78137\,\frac{K\lambda}{L}$$

O valor real da intensidade de campo é, polo tanto,

$$E = \sqrt{\left(19{,}40285\,\frac{K\lambda}{L}+0{,}16251\,\frac{K\lambda}{L}\right)^2+\left(0{,}78137\,\frac{K\lambda}{L}\right)^2} = 19{,}58096\,\frac{K\lambda}{L}$$

mentres que o valor aproximado a partires da ecuación (1) do caso ideal, é

$$E = \frac{2K\lambda}{\frac{L}{10}} = 20\,\frac{K\lambda}{L}$$

sendo o erro relativo

$$e = \frac{20\,\frac{K\lambda}{L} - 19{,}58096\,\frac{K\lambda}{L}}{19{,}58096\,\frac{K\lambda}{L}} = 0{,}0214$$

é dicir, un 2,14 %, que sumado o 1,98 % provocado pola aproximación de a, resulta un 4,12% en total. Se o valor de a fose L/20, o erro total cometido ó tomar Δ = L/10 sería dun 1,04 %. De calquera xeito, sempre que nos movamos no marxe $a \le \frac{L}{10}$ e $\Delta \le \frac{L}{10}$, o erro cometido ó tomar a ecuación do caso ideal dun fío infinito, é mais cativo que un cinco por cento.