UNIDADE DIDÁCTICA SOBRE A RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIÓNS

Rodríguez Riotorto, Mario
IES Punta Candieira - Cedeira

INTRODUCCIÓN

Non é necesario facer fincapé na utilide práctica da resolución de ecuacións; dende as primeiras manifestacións históricas da matemática, os métodos para resolver ecuacións sempre estiveron presentes, e non só na dimensión temporal da historia, senón tamén na espacial, xa que en todas as culturas nas que houbo un desenvolvemento matemático salientable (Mesopotamia, Exipto, China, India, Arabia, Europa), os problemas nos que había que calcular cantidades numéricas a partir de restriccións dadas centraron boa parte da tarefa investigadora. Por outra parte, os métodos numéricos fanse pertinentes para superar as limitacións que ofrecen as técnicas puramente alxebraicas, tanto para a resolución de ecuacións polinómicas de grao maior ca catro, como aquelas nas que non se pode despexar a incógnita.

O plano xeral desta actividade é o de introducir ó alumno nestas técnicas utilizando varias estratexias motivadoras: a) tendo acceso a problemas extraídos das fontes históricas orixinais; b) prantexando problemas reais contextualizados no ámbito da enxeñería, sen dúbida a área onde as técnicas numéricas son de aplicación máis frecuente; c) utilizando como ferramenta de traballo a folla de cálculo, xa que hoxe en día non se concibe o estudo das técnicas de aproximación numérica en ausencia dos contornos informáticos.

Na páxina web de Enciga están dispoñibles os dous documentos de que consta esta actividade: o texto da mesma, en formato PDF, e a folla de cálculo, en

formato OpenOffice (www.openoffice.org), onde se desenrolan os algoritmos numéricos de que trata a unidade.

UNHA VIAXE POLA HISTORIA DAS ECUACIÓNS

Os exipcios non aportaron á matemática moito máis do que aprenderon de Mesopotamia, pero dende logo fixeron un constante uso dela na práctica cotiá; a información que hoxe temos da súa matemática chéganos principalmente dos papiros de Berlin (datado entre 2160 e 1700 AC) e Rhind (1650 AC):

(Problema nº33 do Rhind) Se sumamos unha certa cantidade cos seus dous tercios, a súa metade e a súa séptima parte, o resultado é 37. Dime canto vale a cantidade.

Curiosamente, o xeño grego destacouse máis nos eidos da teoría dos números, da xeometría e da fundamentación formal da matemática que nas ecuacións, a excepción de Diofanto (aprox. 250 DC), quen na súa obra Arithmetica resolve varios tipos de ecuacións e sistemas. Recoñecemos a impronta helenística sobre o desenvolvemento da ciencia árabe, quenes si destacaron polos seus traballos alxebraicos; non é de estranar pois que a propia palabra álxebra proveña da súa lingua. Nomes como Al-Khwarizimi (780-846 DC) ou Omar Khayyan (1040-1131) son de cita obrigada na historia da álxebra:

('Hisab al-jabr w'al-muqabala' de Al-Khwarizimi. Irán.) ¿Cal é o cuadrado (é dicir , x^2) que sumado a dez raices ($10x$) dá o número 39?

Pero o mundo islámico bebeu tamén doutras fontes. Xa en tempos tan lonxanos como o primeiro milenio AC, os escritos védicos coñecidos como Sulbasutras establecían as formas xeométricas exactas dos altares para a oración e trataban problemas que hoxe na súa resolución faríamos uso de distintos tipos de ecuacións. Bhaskaracharya (1114-1185 DC) foi o matemático máis recoñecido da India; cóntase que para consolar a tristura da súa filla por non poder casar, adicoulle un libro de problemas escrito en versos sánscritos e que levaría o seu nome:

('Lilavati' de Bhaskaracharya. India.) Ou rapaza, dun grupo de cisnes, os sete medios da raíz cuadrada do seu número xogan á beira do estanque, e os dous que faltan pelexan amistosamente na auga, ¿cal é o número total de cisnes?

A cultura milenaria chinesa non foi allea ó interese polas ecuacións. A fonte matemática máis importante é a obra anónima datada no século III AC e titulada Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática:

(Chiu Chang, Nove Capítulos. China.) Hai un bambú de 10 chi de alto. O extremo superior rompeu e toca no chan a 3 chi da base do tronco. ¿A que altura se produciu a rotura?

Xa no renacemento italiano, son figuras clave da álxebra Scipione dal Ferro (1465-1526), Niccoló de Brescia Tartaglia (1500-1557) e Gerolamo Cardano (1501-1576) cuias biografías vencéllanse á resolución da ecuación polinómica de terceiro grao; sería Ludovico Ferrari (1522-1565) quen daría conta das de cuarto grao. Por suposto, o seguinte reto serían as de quinto grao.

OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Niels Henrik Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832) daríanlle fin á historia das ecuacións polinómicas ó probar que en xeral, as ecuacións polinómicas de grao maior ca catro non se poden resolver alxebraicamente en termos dun número finito de sumas, restas, multiplicacións, divisións e extracción de raices.

Pero non só estas ecuacións carecen dun método de resolución nun número finito de pasos alxebraicos, senón que a matemática aplicada atopa constantemente ecuacións que non pertencen a esta categoría e que tampouco se poden resolver mediante a aplicación dunha fórmula:

(Un problema demográfico.) Tomando certas hipótesis restrictivas, como que unha poboación crece de forma continua no tempo e que nela non hai mortalidade, o número de individuos en función do tempo pódese modelar mediante

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(\lambda t) + \frac{v}{\lambda} \cdot (\exp(\lambda t) - 1)$$

onde N_0 é a poboación inicial, v un coeficiente que da conta da inmigración absorbida na unidade de tempo e λ a constante de crecemento poboacional. Se nunha poboación que inicialmente ten un millón de individuos e cara á que emigran 435.000 individuos cada ano, se transcorrido o primeiro ano o número de individuos ascendeu a 1.564.000, ¿cal será a razón de crecemento λ desta poboación?

(Un problema de enxeñería hidráulica.) Nos cálculos sobre tuberías hidráulicas é necesario calcular o coeficiente de fricción f para establecer, por exemplo, o tipo de bomba necesaria para crear un caudal determinado. A ecuación de Colebrook é a que se utiza nestes casos, a cal toma a forma

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3.7d} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}}\right)$$

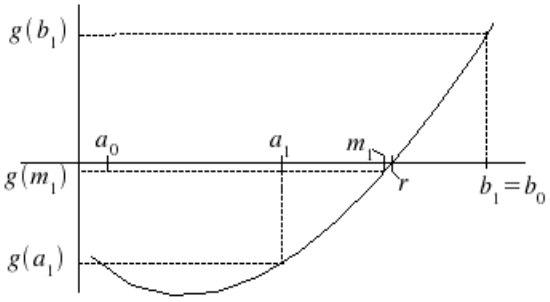
onde:

k : rugosidade da cara interna da tubería (mm)

d : diámetro interno da tubería (mm) R

R : número de Reynolds (adimensional)

Calcula canto vale o coeficiente de fricción da tubería para os valores $k = 0.25$ mm, $d = 300$ mm e $R = 200000$.



Os métodos numéricos que se presentan na unidade didáctica son os de bisección, Newton e Regula Falsi. O primeiro, que non é moi efectivo, foi escollido por ser moi intuitivo e doado de entender: arrinca coa selección dun intervalo inicial $[a_0, b_0]$ no que sabemos que hai unha solución á ecuación $g(x) = 0$; a partir de ahí vaise biparticionando o intervalo escollendo sempre o subintervalo que conteña a solución, parando cando a súa amplitude sexa o suficientemente pequena. Na figura, r é a solución que se quere calcular e sabemos que está dentro do intervalo $[a_0, b_0]$; como o producto $g(a_0) \cdot g(b_0)$ é negativo, dedúcese que r está na segunda metade do intervalo, $r \in \left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$ polo que para a seguinte iteración, definimos $[a_1, b_1] = \left[\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right]$; este esquema de cálculo vaise repetindo ata chegar a un intervalo de amplitude tan pequena como sexa necesario. Esquemáticamente, o algoritmo de bisección resúmese nos seguintes pasos:

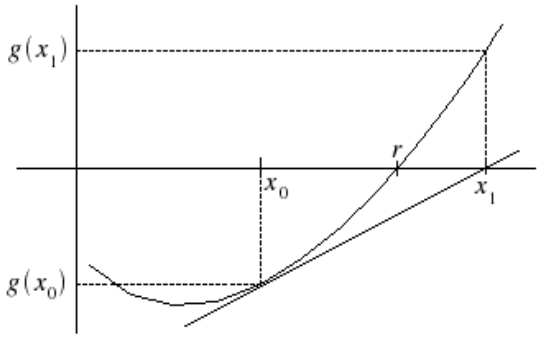
1. Investigar e seleccionar os límites do intervalo inicial, a_0 y b_0. Seleccionar tamén o erro admisible $å > 0$.

2. Na iteración $i \in \{0,1,2,...\}$ o algoritmo, calcular os valores $m_i = (a_i + b_i)/2$, $g(a_i)$, $g(b_i)$ e $g(m_i)$.

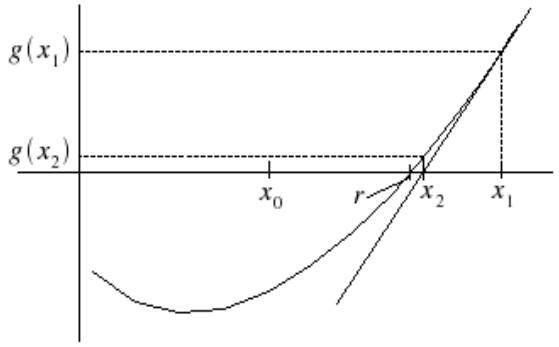
3. Seleccionar o seguinte intervalo de traballo: $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [m_i, b_i]$ se resulta que $g(a_i) \cdot g(m_i) > 0$, e $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [a_i, m_i]$ no caso de que sexa falsa a desigualdade.

4. Se $|g(m_i)| < å$, o resultado será $r \approx m_i$ e damos por finalizado o cálculo. En caso contrario, imos ó paso 2 e seguimos co proceso.

O método de Newton é algo máis sofisticado, xa que necesita que a función $y = g(x)$ sexa derivable; adoita ser máis efectivo có anterior en termos do número de iteracións necesarias para acadar a solución coa precisión prefixada. A solución que se busca é o número r e pártese dunha solución candiadata x_0.



Tomando este punto como referencia calcúlase a ecuación da recta tanxente á curva $y = g(x)$ no punto de coordenadas $(x_0, g(x_0))$, para o cal farase uso da derivada $g'(x_0)$. A recta interseccionará co eixo de abscisas en x_1, tal como mostra a figura. Con esta nova aproximación á solución, vólvese a calcular a recta tanxente que pasa polo punto $(x_1, g(x_1))$ e a súa intersección co eixo de abscisas, dando así lugar á nova aproximación x_2. Este proceso vaise repetindo ata acadar a precisión desexada e especificada por ε. O seguinte cadro resume de xeito esquemático este algoritmo, que posteriormente será implementado na folla de cálculo:



1. Investigar e seleccionar unha solución candidata inicial x_0. Seleccionar tamén o erro admisible $å > 0$.

2. Na iteración $i \in \{0,1,2,...\}$ do algoritmo, calcular a seguinte solución candidata $x_{i+1} = x_i - \dfrac{g(x_i)}{g'(x_i)}$.

3. Se $|g(x_{i+1})| < å$, o resultado será $r \approx x_{i+1}$ e damos por rematado o proceso. En caso contrario, imos ó paso 2 e seguimos coas iteracións.

O método da Regula Falsi pode ser considerado tanto unha variación do de bisección como do de Newton. Dos tres métodos, o de Newton é o máis importante, xa que admite unha versión para a busca de raíces complexas e outra para a resolución de sistemas de ecuacións non liñais. A variante das raíces complexas trátase brevemente na unidade, ó tempo que se fai referencia, sen maiores pretensións, ós conxuntos fractais cos que este algoritmo se relaciona.

A FOLLA DE CÁLCULO

Á hora de escoller unha ferramenta informática para traballar a unidade, optouse por unha folla de cálculo, a de OpenOffice neste caso, por estar os alumnos xa familiarizados con ela. Pero posiblemente outros entornos matemáticos, tamén de software libre (Maxima, Octave, R), poderían ser de utilidade a estes efectos. Todas estas ferramentas son programables, co que se pode analizar e experimentar os pasos intermedios e modificar o comportamento do algoritmo dende o seu estado inicial ata que acada o resultado, poñendo así a proba distintas variacións do procemento.

O documento de cálculo que se deseñou para esta unidade consta de tres follas, unha para cada método, máis unha cuarta folla para traballar as raíces complexas da ecuación $z^3 - 1 = 0$.

Cada folla ten tres partes: na primeira faise unha táboa da función $y = g(x)$, xunto co gráfico correspondente, co obxecto de detectar un entorno que conteña a solución da ecuación $g(x) = 0$; nunha segunda parte o usuario necesita especificar o valor ε que controlará a precisión da solución, e finalmente, un rango adicado ó proceso do algoritmo, perfectamente explicado no texto da unidade. Cuns mínimos coñecementos da folla de cálculo, o alumno ten que ser quen de entender a lóxica do programa e poder modificalo para experimentar con novas variacións ou resolver novas ecuacións.

A26:E26 | Σ = | =SI(ABS(C26)<A20;"¡¡¡listo!!!";"non listo")

	A	B	C	D	E
23	Iteración	x_i	$g(x_i)$	$g'(x_i)$	¿$\lvert g(x_i)\rvert < \varepsilon$?
24	0	0,6000	0,0951	-1,2826	non listo
25	1	0,6742	0,0025	-1,2156	non listo
26	2	0,6762	0,0000	-1,2138	¡¡¡listo!!!

Na figura represéntase unha porción da folla sobre o método de Newton; nela resólvese a ecuación $\sin(x) = 2^{-x}$. Partiuse dun valor inicial $x_0 = 0.6$ e chegouse á solución en só dúas iteracións do algoritmo; a celda resaltada (E26) ten escrita a fórmula que se ve máis arriba no campo de edición, se o valor absoluto da celda C26 é menor que o que contén A20, que é onde se garda $\mathring{a} = 0.001$, remata o proceso, aparecendo "¡¡¡listo!!!" na celda E26; en caso contrario, devolvería "non listo" e nós teríamos que seguir arrastrando o rango A26:E26 cara abaixo. A solución final que se dá por boa coa precisón dada está na celda B26, na que está gardada a fórmula "=B25-C25/D25".

O feito de que o alumno practique directamente facendo modificacións na folla de cálculo reforza nel a lóxica do procedemento, como esta actividade relativa ó método de bisección:

(Outro criterio de parada.)

Na celda H24 o código

SI(ABS(G24)<A20;"¡¡¡listo!!!";"non listo")

controla se a solución acadada en certa iteración verifica a condición $|g(m_i)| < \mathring{a}$, isto é, se o valor que toma a función g no punto medio m_i, está suficientemente preto de cero, onde o termo suficientemente queda determinado polo erro admisible $\mathring{a}$. Pero esta non é a única condición coa que podemos traballar; outra posibilidade é parar o algoritmo cando se verifique que a diferencia entre as dúas últimas solucións se diferencien en valor absoluto unha cantidade menor ca $\mathring{a}$. ou sexa, cando se verifique $|m_i - m_{i-1}| < \mathring{a}$.

Modifica calquera dos exercicios que fixeches nesta sección para que a condición de parada sexa esta última.

Todo isto apréndese para algo; xa vimos máis arriba un exemplo demográfico e outro sobre un problema extraído do ámbito da enxeñería, formando ambos os dous parte da batería de actividades propostas. Outro exemplo contextualizado,

(Un problema máis real do que pensas.) Un préstamo de A € debe ser devolto mediante n mensualidades de M € cada unha, comenzando ó mes seguinte ó do préstamo. Pódese demostrar que se o interés mensual é medido en tanto por un, entón verifícase a igualdade

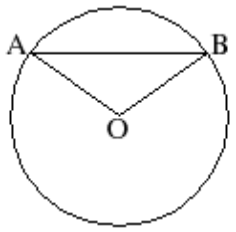
$$A \cdot r = M \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Un préstamo de 10000 € para un coche é devolto en 60 pagos mensuais de 250 €. Utiliza o método de Newton para saber o interés que lle cobra o banco ó cliente.

Tampouco faltan actividades de tinte máis teórica:

(Expresión alternativa para a fórmula de recurrencia.) Demostra que a expresión para calcular x_i, polo método da Regula Falsi é equivalente a

$$x_i = \frac{a_i g(b_i) - b_i g(a_i)}{g(b_i) - g(a_i)}$$



Por último, unha aplicación xeométrica:

(Xeometría da circunferencia.) A circunferencia da figura ten radio unidade e o arco maior que une os puntos A e B ten lonxitude dobre da que ten a corda AB. Calcula a lonxitude da corda.

AGRADECEMENTOS

Quero aproveitar a ocasión para expresar o meu agradecemento ós membros do xurado ó outorgarlle a esta unidade o premio Enciga-Matemáticas á elaboración de Unidades Didácticas.