A INCERTEZA DE UMA MEDIÇÃO

CAMPOY VÁZQUEZ, Carlos
Dpto. de Física - Facultade de Ciências
UNIVERSIDAD DA CORUNHA

RESUMO

O resultado numérico de um experimento científico apresenta-se na forma $V \pm E$ para pôr de manifesto que V não é um valor inteiramente certo, é uma estimativa do que seria a medição exacta, mas inacessível, que se está a procurar. No presente trabalho dá-se uma interpretação do significado das duas quantidades V e E à luz da inferência estatística, e quais as fórmulas que no-los fornecem

1. INTRODUÇÃO

Os professores de Física, Química, Biologia ou Geologia devem transmitir aos alunos o conceito de incerteza em relação aos resultados das medições das grandezas objecto de cada ciência.

O habitual é escrever $V \pm E$ sendo V o chamado «*melhor valor*» da medida procurada, e E o chamado, talvez impropriamente, «*erro absoluto*».

O modo correcto de calcular ambos, e o significado exacto de cada um deles, tratam-se dentro da Inferência Estatística, que é uma parte da Matemática, cujos professores, ai! não precisam transmitir aos seus alunos porque na sua aula os números são todos exactos…(?).

Para aqueles, acaso, vai ser de difícil leitura este trabalho; para estes, de pouco interesse. Para que não seja totalmente inútil, indicarei agora os resultados finais a modo de receitas práticas.

1º) Fiz N vezes a medição de uma grandeza, e os resultados foram: x_1, x_2, ... , x_N; então o melhor valor será: $V = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$, e o erro absoluto:

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - V)^2}{N \cdot (N-1)}} .$$

E deve apresentar-se com um único algarismo significativo, para o qual deve arredondar-se o resultado do cálculo anterior *sempre para cima.* V não terá algarismos menos significativos que o do erro, então também terá que ser arredondado (para cima ou para baixo, segundo corresponda usando as regras do arredondamento).

Exemplo: $x_1 = 7{,}4 \;\; x_2 = 7{,}5 \;\; x_3 = 7{,}8 \;\; \Rightarrow V = 7{,}5666...$

$E = 0{,}120185$ então apresentaremos finalmente: $7{,}6 \pm 0{,}2$

N equipas de investigadores mediram, com independência os uns dos outros, determinada grandeza, e os respectivos resultados, junto com os correspondentes erros, foram: $x_1 \pm E_1 \qquad x_2 \pm E_2 \; ... \; x_N \pm E_N$. O melhor valor será: $V = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{E_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{E_i^2}}$

e o erro absoluto: $E = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{E_i^2}}}$

Exemlo: $7{,}4 \pm 0{,}5$, $7{,}5 \pm 0{,}4$, $7{,}8 \pm 0{,}6 \;\Rightarrow\; V = 7{,}53326...$

$E = 0{,}27705...$ então apresentaremos finalmente: $7{,}5 \pm 0{,}3$

ADVERTÊNCIA: Este último resultado não significa que o verdadeiro e desconhecido valor exacto V que estamos a procurar deva cumprir $7{,}2 < V < 7{,}8$; logo veremos que tal afirmação é provável (com probabilidade $2/3$), mas não segura. Uma prática habitual de laboratório de Física, é medir a aceleração da gravidade $g = 9{,}8 \quad m \cdot s^{-2}$ utilizando um pêndulo ou um plano inclinado e um objecto que desliza por ele. Se um aluno obtém $g = 9{,}1 \pm 0{,}6 \quad m \cdot s^{-2}$, não devemos reprová-lo!

Logo veremos que a total segurança só a teremos triplicando a semi-largura do intervalo de incerteza (e ainda seria com apenas uma probabilidade de 99,7%).

2. NÚMEROS APROXIMADOS

Quando escrevemos $\pi = 3{,}14 \qquad \sqrt{2} = 1{,}41 \qquad e = 2{,}72$ estamos a utilizar valores aproximados resultado de um arredondamento. Se fôssemos rigorosos deveríamos escrever

$$3{,}135 < \pi < 3{,}145 \qquad 1{,}405 < \sqrt{2} < 1{,}415 \qquad 2{,}715 < e < 2{,}725$$

pois 1º/ o valor exacto está no intervalo e 2º/ qualquer dos valores do intervalo (chamado *de incerteza*) daria lugar, por arredondamento, ao valor aproximado.

O modo habitual de escrever é:

$$\pi = 3{,}140 \pm 0{,}005 \qquad \sqrt{2} = 1{,}410 \pm 0{,}005 \qquad e = 2{,}720 \pm 0{,}005$$

e, ainda que impropriamente, chamamos erro absoluto à metade do comprimento do intervalo de incerteza, 0,005 nos três exemplos. (Em realidade o erro absoluto é a diferença entre o desconhecido valor verdadeiro e o valor central do intervalo de incerteza, mas esta definição não é útil).

3. DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE PROBABILIDADE

Se medimos uma grandeza física com um instrumento de medida *ad hoc*, obteremos um resultado necessariamente impreciso por não ser nunca infinitamente pequeno o parâmetro δ ou distância entre duas divisões consecutivas no visor do instrumento (δ chama-se *sensibilidade* do aparato). Por exemplo, com uma régua

escolar não podemos obter exactamente um comprimento de $l = 0{,}007341 \quad m$, pois a sensibilidade do utensílio utilizado é $0{,}001 \quad m$ pelo que apenas é possível informar que $0{,}006 \quad m < l < 0{,}008 \quad m$ ou $l = 0{,}007 \pm 0{,}001 \quad m$ porque a nossa única segurança é que o comprimento a medir acaba perto da divisão $7 \quad mm$ da régua.

Podemos afirmar com segurança que o valor exacto desconhecido está no intervalo de incerteza dado e com idêntica probabilidade em qualquer dos pontos do seu interior. O mesmo para esta medição que para os três números aproximados do segundo parágrafo.

Todos os casos anteriores encaixam no seguinte esquema: Seja o número aproximado $x = 0 \pm 1$. Pode considerar-se como um valor desconhecido ode considerar-se como um valor desconhecido x com uma probabilidade $\int_a^b f(t) \cdot dt$ de verificar $a < x < b$, sendo $f(t) = \begin{cases} 1/2 & se \quad -1 < x < 1 \\ 0 & no \quad resto \end{cases}$.

Esta distribuição de probabilidade (chamada *uniforme*) tem valor médio e desvio padrão: $\mu = \int_{-1}^{+1} t \cdot f(t) \cdot dt = 0$ e $\sigma = \sqrt{\int_{-1}^{+1} t^2 \cdot f(t) \cdot dt - \mu^2} = \sqrt{1/3} \approx 0{,}577$, respectivamente (como é tradicional, consideraremos o desvio padrão como um indicador da dispersão dos diferentes hipotéticos resultados de infinitas medições repetidas).

Ao tratar de esse modo o resultado da medição do comprimento de $7 \quad mm$ com uma régua escolar estou-me limitando ao caso em que δ é relativamente grande em relação com o comprimento a medir. Ainda entenderíamos melhor esta ideia se a regra escolar tivesse apagadas as divisões dos milímetros ficando visíveis apenas as dos centímetros. Nesse caso o resultado seria $0 \quad cm < l < 1 \quad cm$ e a distribuição de probabilidade para l seria uniforme com absoluta segurança, porque ninguém pode duvidar que o resultado procurado está no intervalo, mas não sabemos onde.

Mas as coisas não serão assim quando δ for muito menor que o comprimento a medir. Por exemplo, se medimos o comprimento de uma parede de um quarto

com uma cinta métrica de 20 m, e obtemos com uma só medição o resultado de $l = 12{,}207 \quad m$ e decidimos que os possíveis resultados ao repetir infinitas vezes a medição de l distribuem-se equi-provavelmente no intervalo $12{,}206 \quad m < l < 12{,}208 \quad m$, estaríamos ignorando fontes de erro muito importantes. Estas não se reduzem à capacidade ocular do experimentador para dar conta de onde exactamente se situa o extremo do comprimento a medir. Aqui serão causa de diferentes resultados a maior ou menor minuciosidade da colocação do extremo inicial da cinta medidora, a sua mais ou menos perfeita aderência à parede, o controle da absoluta rectitude do muro, as possíveis torceduras da cinta, o total paralelismo da fita a respeito do chão (a cinta dispõe-se alta para evitar a mobília) etc. Com só repetir uma vez a medição, veremos que era ilusório pensar em um milímetro como semi-comprimento do intervalo de incerteza.

Por estas ou por outras causas impossíveis de controlar, o feito que se constata diariamente nos laboratórios científicos, é que ao reiterar uma medição, ainda tendo o máximo cuidado, obtêm-se valores que se afastam uns dos outros em várias vezes o parâmetro δ.

4. DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADE

Para um aparelho de medida que tenha um número elevado de fontes potenciais de erro, razoavelmente independentes e sem que nenhuma delas seja dominante em termos da amplitude do erro introduzido, é de esperar que o erro global tenha uma distribuição aproximadamente *normal* (consequência do *teorema do limite central* [4]). Isto é o que acontece na generalidade das medições científicas (em ausência de erros sistemáticos, ou enviesamentos devidos ao instrumento de medida ou à actividade do manipulador).

De este modo, podemos postular que o resultado de qualquer medição, é uma variável aleatória normal $N(\mu,\sigma)$ cuja função de probabilidade (função de Gauss), como é sabido, é:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

E o gráfico correspondente é uma curva simétrica respeito à vertical $x = \mu$ onde toma o valor máximo, côncava (derivada segunda positiva) no intervalo $\mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ e que se aproxima assimptoticamente ao eixo de abcissas.

Em realidade isto é uma idealização pois por muitas repetições que façamos do acto de medir, nunca obteremos uma distribuição contínua de probabilidade, senão um histograma das frequências correspondentes a cada um dos intervalos de largura δ em que podemos imaginar dividida a recta real. Isto é assim porque não podemos distinguir ocularmente duos resultados que, sendo diferentes, contenham o mesmo número inteiro de vezes δ.

Porém, se realizamos um elevado número de repetições (N) para um valor grande em relação com a sensibilidade δ (para evitar situações como a da regra escolar com as divisões dos milímetros apagadas), obteremos um histograma muito bem ajustado à curva de Gauss, e de estes dados será possível estimar os valores de μ e σ. Sejam os resultados obtidos x_1, x_2, x_3, …, x_N

Ambos poderiam serem estimados, se N é grande, pela média da amostra $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ que podemos considerar um estimador de μ, e pelo *desvio padrão da amostra* $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$ que servirá para estimar σ (estes são os estimadores melhores de ambos parâmetros [2])

Qual é o significado de ambos parâmetros? Vimos que a função de probabilidade tinha um máximo em $x = \mu$, é dizer, medindo cuidadosamente, é mais provável obter o resultado μ que qualquer outro. Ademais um resultado será tanto mais improvável quanto mais afastado esteja de μ. Então é lógico pensar em μ como o *verdadeiro valor* ou o *valor exacto* que estamos a procurar. (Como desde o ponto de vista da Física Quântica, tal conceito não existe, podemos adoptar o parâmetro μ como uma *definição* do verdadeiro valor). O outro parâmetro σ (desvio padrão da população) vai significar a semi-largura do intervalo de incerteza, o qual deverá entender-se, como logo veremos, de modo radicalmente diferente do seu análogo no parágrafo 2.

Como as probabilidades correspondentes à distribuição normal, é dizer:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Estão tabeladas, não é difícil comprovar que:

$$P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)=P(x-\sigma<\mu<x+\sigma)=0{,}6827\approx 2/3$$

De modo que para qualquer dos resultados da medição x_i , o intervalo $x_i \pm\sigma$ (ou $x_i \pm S$) contém o verdadeiro valor com uma probabilidade de aproximadamente $2/3$

E porque não construir um intervalo de incerteza que contenha *todos* os possíveis resultados? Tal acontecia quando a distribuição de probabilidade era uniforme, mas no caso da normal, *qualquer resultado* é, em princípio, possível. Naturalmente ninguém crê isto, pois se um comprimento é $l=252 \quad mm$ nunca mediremos $l=900 \quad mm$. A causa de esta situação paradoxal deve buscar-se na idealização feita ao substituir uma distribuição de frequências discreta por uma distribuição contínua de probabilidade. Podemos, no entanto, indicar um intervalo que cobre as nossas expectativas bastante bem:

$$P(x-3\cdot\sigma<\mu<x+3\cdot\sigma)=0{,}9973$$

Então a efeitos práticos, o valor verdadeiro está *com total segurança* no intervalo $x_i \pm 3\cdot S$ de igual modo que escrevíamos no parágrafo 1

$$\pi=3{,}140\pm 0{,}005 \qquad \sqrt{2}=1{,}410\pm 0{,}005 \qquad e=2{,}720\pm 0{,}005$$

Porém, a apresentação do resultado da medição faz-se utilizando como intervalo de incerteza o que tem de centro *qualquer dos resultados obtidos* e de semi-largura o desvio padrão, entendendo-se tacitamente que tal intervalo contém o valor verdadeiro com uma probabilidade de aproximadamente 2/3. Por exemplo, chamando x_1 ao primeiro resultado, o valor final seria $x_1 \pm S$. Mas, com igual direito: $x_2 \pm S$ ou $x_3 \pm S$, etc.

Em resumo, temos feitas N medições e a cada uma delas lhe foi assinado um intervalo de incerteza, mas, não poderíamos melhorar esses N resultados aproveitando a repetição do processo?

5. A BUSCA DA PRECISÃO REPETINDO MEDIDAS

Ao imaginar as infinitas possíveis amostras de dimensão N , as correspondentes médias amostrais estariam distribuídas segundo outra distribuição

normal, com a mesma média que a da população das medidas possíveis (μ), e com desvio padrão notavelmente inferior ($\sigma/\sqrt{N}$). È o que se chama *distribuição por amostragem* [3].

Porque dar como valor central do intervalo uma das N medições? Logicamente será melhor, já que fizemos N medições, apresentar como centro o que se utilizou para estimar o verdadeiro valor, é dizer, $\bar{x}$

Mas este valor médio tem uma dispersão diferente que será a que colocaremos como semi-largura do intervalo de incerteza, ficando como definitiva a expressão:

$$\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Em termos probabilísticos teríamos as seguintes interpretações:

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}6827 \approx 2/3$$

$$P\left(\bar{x} - 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}9545$$

$$P\left(\bar{x} - 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}9973$$

[*Certamente, a distribuição de* $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ *é* $N(0,1)$, *no entanto a variável* $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{N}}$ *tem uma distribuição ligeiramente diferente, chamada* t *de Student, cujos valores estão também tabelados, mas é preciso conhecer* N *; por exemplo, para* $N = 10$, *as anteriores probabilidades seriam* 0,66 0,93 0,99 *Isto é mais exacto, mais geralmente não podemos aplicá-lo, pois ignoramos o nº de medições feitas quando se nos apresenta o resultado com o seu erro. Em qualquer caso a diferença não é importante e, ademais, diminui ao aumentar* N . *Para* $N \geq 30$ *é desprezível*]

A vantagem de utilizar o desvio padrão é que se conhece perfeitamente o modo como os de diferentes variáveis se transmitem ao operar com elas: Com efeito, se $z = f(x, y)$, sendo os argumentos da função variáveis independentes entre si, o desvio padrão de z pode calcular-se por médio da fórmula [5]:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \sigma_y^2$$

Se alguma das variáveis tem uma distribuição de probabilidade uniforme como os do parágrafo 3, então utiliza-se como desvio padrão a semi-largura do seu intervalo de incerteza multiplicada pelo factor $\sqrt{1/3} \approx 0{,}577$

Por exemplo, se procuramos a área de um círculo $A = \pi \cdot r^2$ e depois de repetir várias vezes a medição do rádio obtemos $r = 2{,}127 \pm 0{,}006 \quad m$, devemos utilizar o valor de π com três cifras decimais exactas: $\pi = 3{,}1420 \pm 0{,}0005$

$$A = 3{,}142 \cdot 2{,}127^2 = 14{,}2148 \quad m^2$$

$$\sigma_A = \sqrt{2{,}127^2 \cdot (0{,}005 \cdot 0{,}577)^2 + (2 \cdot 3{,}142 \cdot 2{,}127)^2 \cdot 0{,}006^2} = 0{,}0804$$

Deve ter-se em conta que o desvio padrão é consequência de uma estimação pelo que não tem demasiado sentido indicá-lo com excessiva precisão: *um algarismo significativo será suficiente*. Por prudência, é recomendável fazer para cima o arredondamento do erro. Logicamente deverá arredondar-se o valor central do intervalo de incerteza para que o seu dígito de menor significância tenha a mesma que o do desvio padrão. Então deveríamos exprimir o resultado assim:

$$A = 14{,}21 \pm 0{,}09 \quad m^2$$

6. PRECISÃO E APROXIMAÇÃO

Devemos distinguir entre precisão e aproximação (*accuracy*) [1]. Podemos medir com muita *precisão* um comprimento com um calibrador que tem uma alta sensibilidade ($\delta = 0{,}05 \quad mm$), mas a *aproximação* será escassa

se o instrumento está dilatado o 10% por causa da alta temperatura dentro do laboratório. Teríamos um erro sistemático, é dizer, um enviesamento. Este tipo de erros são inevitáveis e apenas podemos aspirar a minimizá-los.

A medida da precisão de um resultado experimental numérico, suposta a ideal minimização dos enviesamentos –conformar-nos-emos com ter a confiança de que o erro de enviesamento seja por volta de 10^{-1} vezes δ -, indica-se por médio do desvio padrão, é dizer, pela dispersão das diferentes medições repetidas que pudéssemos fazer na procura do mesmo valor. Já vimos que quantas mais vezes repitamos o acto de medir uma mesma grandeza, maior será a precisão lograda. Porém esta ambição tem um limite, pois não devemos permitir que o intervalo de incerteza chegue a ser menor que o inevitável enviesamento do instrumento de medida. (Estaríamos ganhando precisão, mas teriamos começado a perder aproximação).

Por exemplo, uma regra escolar, por muito bem fabricada que esteja, sempre terá algum desvio com respeito ao metro padrão de platina-irídio conservado em Paris. Seja o 0,1%. Então poderíamos confiar em um resultado como $l = 25{,}3 \pm 0{,}2 \quad mm$ e não noutro como $l = 25{,}31 \pm 0{,}01 \quad mm$, pois o erro sistemático é superior a $0{,}02 \quad mm$

Qual é pois o máximo número de repetições recomendado para maximizar a precisão sem esbanjar o nosso tempo em medições inúteis? Se com N repetições conseguimos um desvio padrão amostral $3 \cdot \frac{S}{\sqrt{N}} \approx \delta$ teremos praticamente um 100% de probabilidades de que o valor verdadeiro coincida (dentro da sensibilidade limitada do instrumento de medida) com o dado por nós como aproximação melhor.

7. CONCLUSÃO

Se repetimos N vezes uma medição e obtemos x_1 , x_2, x_3, … , x_N devemos calcular $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ e $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)}{N-1}}$, e de este modo podemos indicar as incertezas de cada um dos anteriores valores: $x_1 \pm S$, $x_2 \pm S$, $x_3 \pm S$, … , $x_N \pm S$

Porém, melhor que cada um deles, é apresentar como resultado definitivo:

$$\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{N}}$$

Um caso ligeiramente distinto é aquele em que as diferentes medições foram efectuadas por equipas de investigadores independentes, fruto cada uma delas de processos mais ou menos sofisticados, aportando-se em cada caso o erro correspondente: $x_1 \pm S_1$, $x_2 \pm S_2$, $x_3 \pm S_3$, …, $x_N \pm S_N$

Supostas as x_i variáveis aleatórias normais, independentes entre si, a função de probabilidade da sequência (x_1, x_2, … , x_N) será o produto das probabilidades de cada um dos valores:

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{S_i\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}\left(\frac{x_i-\mu}{S_i}\right)^2}$$

Usando o método de máxima verosimilhança, devemos maximizar essa probabilidade, o qual faremos igualando a zero a derivada a respeito da variável μ, do exponente (que deverá ser mínimo), obtemos:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_i}{S_i^2}\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)}$$

que será o melhor valor da medição buscada, e usando a fórmula das derivadas parciais, obteremos o correspondente erro: $E = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{S_i^2}\right)}}$

REFERÊNCIAS

[1] Bevington, Philip R. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical*

Sciences Ed. McGraw-Hill Book Company, New York 1969. Pág. 3

[2] Campos Guimarães, Rui e Sarsfield Cabral, José A., Estatística, Ed. McGraw-Hill de Portugal, Lda., Lisboa 1997 página 265 e seguintes.

[3] Campos Guimarães, Rui e Sarsfield Cabral, José A., Estatística, Ed. McGraw-Hill de Portugal, Lda., Lisboa 1997 página 235 e seguintes

[4] Rios, S. *Métodos Estadísticos* Ediciones del Castillo, Sexta ed., Madrid 1967, página 212, alíneas 1 - 6

[5] Sánchez del Rio, C. Análisis de Errores, EUDEMA, Madrid 1989, pág 35