PROBLEMAS DE DEDUCCIÓN LÓGICA: DEL *SUDOKU* AL ANÁLISIS RETRÓGRADO

SILVA, Pedro V.
Dpto. de Matemática Pura - Facultad Ciencias
UNIVERSIDAD DE PORTO - PORTUGAL

¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA?

La Matemática no se limita a los números. Los *aspectos cuantitativos* han sido siempre importantes en su desarrollo y en su relación con las otras ciencias, pero la Matemática ocupase también de *aspectos cualitativos*: preguntas cuya respuesta puede ser SÍ o NO; por ejemplo, determinar si existe o no un algoritmo (programa de ordenador) que resuelva un determinado problema.

De hecho, la Matemática se define sobretodo por medio de dos atributos:

· *abstracción*: el pasaje del particular al universal, buscando la máxima generalidad;

· *formalización*: la búsqueda del rigor y de un lenguaje adecuado a la correcta formulación y resolución de los problemas.

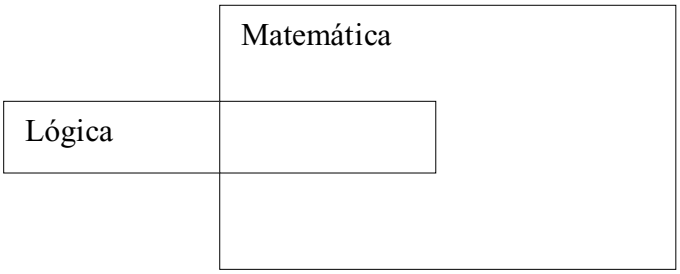
Así se explica la expansión permanente de la Matemática y la ocupación progresiva de territorios de otras ciencias: el desarrollo natural de estas últimas produce un aumento del nivel de abstracción y formalización, haciendo útil, a partir de un cierto punto, el recurso a la Matemática y a los matemáticos.

RACIOCINIO DEDUCTIVO VERSUS INDUCTIVO

¿Cómo se hace Matemática? ¿Cómo piensa un matemático? ¿Qué relaciones existen entre Matemática y Lógica?

El objeto primordial de la Lógica es la validez de los diversos tipos de raciocinio. La Lógica no está contenida en la Matemática pues tiene forzosamente

de ocuparse de raciocinios no matemáticos así que matemáticos, y sus cuestiones primeras deben por eso ponerse en el dominio de la Filosofía. Sin embargo, hay una intersección apreciable.



El raciocinio típico de la Lógica es la *deducción* o *raciocinio deductivo*: trabajando dentro de un sistema bien definido, se parte de hechos determinados o hipótesis y se obtienen conclusiones a través de una cadena de afirmaciones que se van produciendo a partir de las anteriores aplicando un pequeño conjunto de reglas/técnicas de reconocido valor universal: por ejemplo, la reducción al absurdo: sabes que $x = 0$ o $x = 1$; si supones que $x = 0$ y llegas a una contradicción, luego concluyes que $x = 1$.

Cuando leemos una prueba en algún libro de Matemática, es este tipo de raciocinio que encontramos con más frecuencia. Sin embargo, si la Matemática se redujese a la deducción, podría con toda probabilidad ser hecha por ordenadores en algún futuro no muy distante. Que no sea así se lo debe fundamentalmente a dos razones:

· ¿cómo puede uno saber que teoremas le interesa demostrar y cuáles tienen probabilidades de ser verdaderos?

· ¿cómo elegir o mismo inventar el sistema formal adecuado para resolver un dado problema?

Y así llegamos al otro raciocinio fundamental en Matemática, el *raciocinio inductivo*: la capacidad de abstraer de ejemplos y experiencias la generalidad o apenas su posibilidad. Es aquí que probablemente se revelan los mayores talentos del matemático: suele necesitarse imaginación y creatividad para lograr ver el invisible. En suma, la capacidad de abstraer y formalizar.

Es también aquí que la Matemática se acerca a la naturaleza de las ciencias experimentales tales que la Física o la Química, como reclaman muchos epistemólogos.

Claro está que el raciocinio inductivo debe preceder y completarse por el raciocinio deductivo, esencial a la Matemática.

¿UNA CUESTIÓN DE GUSTO?

Claro que todo matemático debe dominar ambos tipos de raciocinio, pero muchos prefieren uno u otro:

· a unos les gusta más la parte inductiva como más interesante y creativa, despreciando la deductiva como técnica y aburrida;

· a otros les gusta más la parte deductiva y su mundo despojado de incertidumbre, un monumento de armonía.

¿Bach o Miles Davis? No hay respuesta.

Los no matemáticos, en particular nuestros alumnos, suelen tener ellos mismos sus preferencias (incluso hay aquellos refractarios a todo tipo de raciocinio). ¿Qué motivaciones y herramientas podremos utilizar para desarrollar en ellos la capacidad y el gusto por el raciocinio?

Juegos con una componente estratégica suelen desarrollar el raciocinio inductivo *durante el período de aprendizaje y evolución*, cuando hay que generalizar y abstraer a partir de experiencias múltiples. Claro que, a un cierto punto, la evolución cede el paso a la mecanización, y por eso los juegos más interesantes son los más complejos, en particular el ajedrez.

EL *BOOM* DEL *SUDOKU*

Durante años, se aceptó que el gusto por el raciocinio deductivo estaba limitado a una minoría, pero la popularidad extraordinaria alcanzada por el *sudoku* en estos últimos años demostró el contrario. Sin duda, parte de lo placer que uno proba al lograr resolver estos problemas se debe al sentimiento de afirmación de capacidades que temía no poseer, quien sabe se debido a malas experiencias con la Matemática…

Las técnicas más utilizadas en su resolución son las siguientes:

· hacer la conjunción de un cierto número de condiciones, de modo a concluir que número ocurre en una dada posición;

Figura 1

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
I		7				6	9		
H	1			3			5		
G			9		5	1		4	
F							4	5	
E	8	9		5		2		3	6
D			5						
C	9	6	8	1	7	5	3	2	4
B						3			5
A	3	5	2	4				7	

· eliminar opciones por reducción al absurdo.

Como ejemplo, consideramos la siguiente posición de un *sudoku* clasificado como mucho difícil (figura 1):

Es posible deducir que Ia = 5 del siguiente modo: el cuadrado 3 x 3 superior izquierdo contiene un 5; no pude estar en las columnas b y c pues estas ya contienen 5; entonces estará en la columna a; como la fila G ya tiene un 5, la única posibilidad es que estuviera en Ia.

Luego, actualizando, obtenemos

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
I	5	7				6	9		
H	1			3			5		
G			9		5	1		4	
F							4	5	
E	8	9		5		2		3	6
D			5						
C	9	6	8	1	7	5	3	2	4
B						3			5
A	3	5	2	4				7	

Esta es una de aquellas posiciones que requieren argumentos más sofisticados de reducción al absurdo. Vamos deducir que Ic = 3. Si Ic no es 3, entonces tendrá que ser 4 (los otros casos son excluidos por el análisis del cuadrado 3 x 3, de la fila I y de la columna c). Pero entonces Hc = 6 (exclusión análoga) y luego Ga = 2. Obtenemos así

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
I		7	4			6	9		
H	1		6	3			5		
G	2		9		5	1		4	
F							4	5	
E	8	9		5		2		3	6
D			5						
C	9	6	8	1	7	5	3	2	4
B						3			5
A	3	5	2	4				7	

Pero entonces Hb = Hh = 8, contradicción. Luego Ic = 3.

No se puede dudar de que el ejercicio de estos raciocinios deductivos pueda favorecer el desarrollo mental de nuestros alumnos, particularmente mientras hay lugar a aprendizaje o evolución. Sin embargo, no se debe sobrevalorar su potencial:

· después de alguna práctica, hay la tendencia a mecanizar raciocinios;

· probablemente, la naturaleza repetitiva de los problemas llevará a una pérdida de interés progresiva de los aficionados, como sucedió con el cubo de Rubik en los años 80.

MÁS ALLÁ

Ante estas consideraciones, el momento me parece propicio a intentar interesar los alumnos por problemas de naturaleza lógica/deductiva más interesantes.

En los años 80, una revista francesa llamada *Jeux et Stratégie* ha introducido a mi y a muchos jóvenes en seductores mundos de deducción lógica a la vez divertidos y estimulantes. Me recuerdo de relatos de aventuras en planetas imaginarios en los cuales el lector debía elegir opciones lógicas que conducían a sucesos diferentes en un laberinto de posibilidades.

Un problema similar es el siguiente:

Problema: En el planeta X, hay 3 sexos A, B y C que se diferencian así:

· A dicen siempre la verdad;

· B mienten siempre;

· C dicen lo que quieran.

Un viajero sabe que va encontrar 3 seres de sexos diferentes. ¿Cómo puede distinguirlos haciendo solo 2 preguntas?

¡Este problema tiene alguna dificultad y son deseables algunos conocimientos de Cálculo Proposicional para su resolución!

Con el desarrollo de los juegos de ordenador, *Jeux et Stratégie* no pudo sobrevivir, pero no sin antes introducir a muchos de sus lectores al mundo fascinante del *análisis retrógrado* en ajedrez, que contiene probablemente los más complejos e interesantes problemas de deducción.

EL ANÁLISIS RETRÓGRADO

Para comprender estos problemas, hay que conocer bien las reglas del ajedrez, incluso las menos divulgadas:

· posibilidad de un peón promover a dama, torre, alfil o caballo al atingir la última fila;

· captura *en passant*: un peón no pude evitar la captura por otro peón al avanzar dos casas – esto es, el peón adversario tiene la opción de capturarlo;

· condiciones para enrocar:

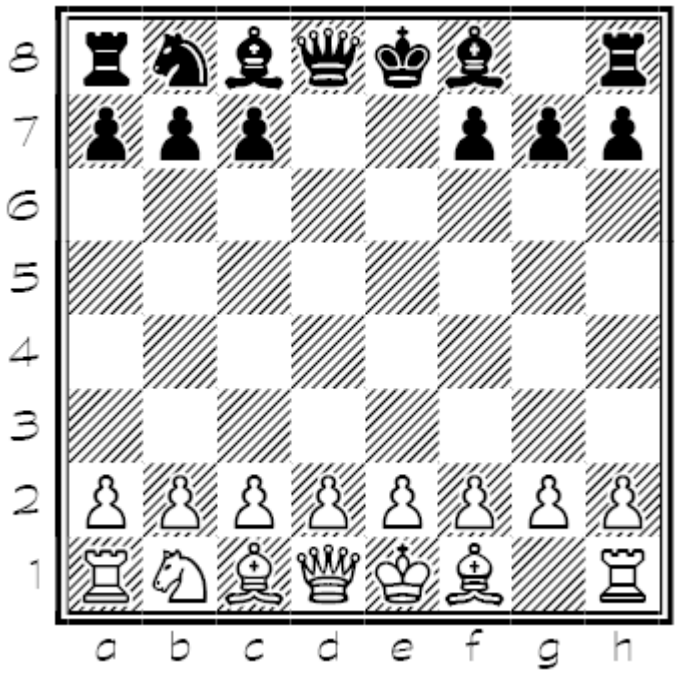
- ni el rey ni la torre podrán haber movido antes;
- el rey no puede estar en jaque, ni atravesar o quedarse en una casilla amenazada.

En cada problema se pide al lector para reconstituir jugadas o descubrir hechos *relativos al pasado de una cierta posición*. ¡Es como hacer una pequeña (o grande) investigación policial basada apenas en la lógica y la deducción! No es importante jugar bien al ajedrez, las posiciones en todo caso suelen ser totalmente artificiales, y las jugadas, ¡mejor ni hablar!

Presentaremos 3 problemas de naturaleza muy diversa:

Problema 1 (E. C. Mortimer, 1991)

La posición siguiente fue obtenida después de la 4ª jugada de las negras.



¿Cuáles fueran las jugadas?

En 3 de sus 4 jugadas, las blancas habrán comido dos peones y un caballo negros.

El caballo en b1 no se ha movido: si lo hubiera hecho, tendría que haber comido una pieza negra en b1 debido al hecho anterior. Pero ninguna pieza negra podría alcanzar b1 en 3 o menos jugadas.

Luego la primera jugada de las blancas fue con su caballo de rey. Si hubieran jugado Ch3, no podrían comer una pieza negra en la jugada siguiente, luego el juego empezó por

1. Cf3

y para que las blancas pudiesen comer una pieza en la 2ª jugada, tuvo que continuar

1. … e5
2. C x e5

¿Qué pieza comieran las blancas en su 3ª jugada? El peón d7 o el caballo de dama en c6. Pero esto es imposible porque las negras no podrían mover su caballo de rey hacia b8 en 2 jugadas. Luego en la partida se jugó

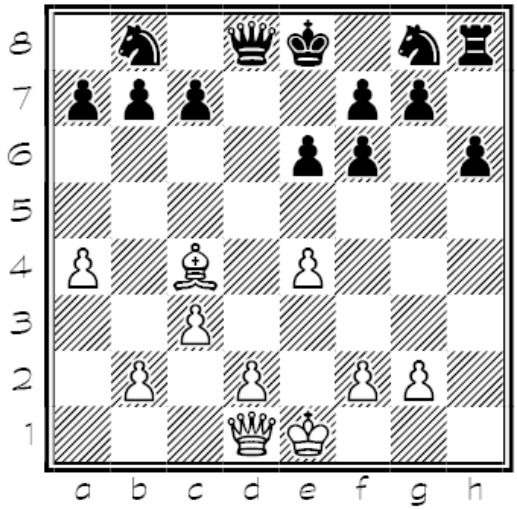
1. Cf3 e5
2. C x e5 ?
3. Cx d7 ?

En su 4ª jugada, las blancas comieran un caballo y su caballo fue en seguida comido, en la 8ª fila necesariamente. Claro que no puede haber sido en f8 (no habría tiempo para jugar el alfil dos veces y trasladar un caballo a f8), luego las blancas jugaran C x b8 y ¡el caballo que está ahora en b8 es el caballo de rey! La única forma de haberlo conseguido es a través de

1. Cf3 e5
2. C x e5 Ce7
3. Cx d7 Cec6
4. C x b8 C x b8

Problema 2 (R. Smullyan, 1981)

Un análisis de la estructura de peones negra nos permite concluir que dos piezas blancas fueran comidas en e6 y f6. ¿Qué piezas? La dama no se movió. Los caballos hubieran amenazado al rey o a la dama, y el alfil de casillas negras fue seguramente comido en c1. Luego las piezas comidas en e6 y f6 habrán sido torres o el peón que falta, sea como peón o como pieza promocionada.



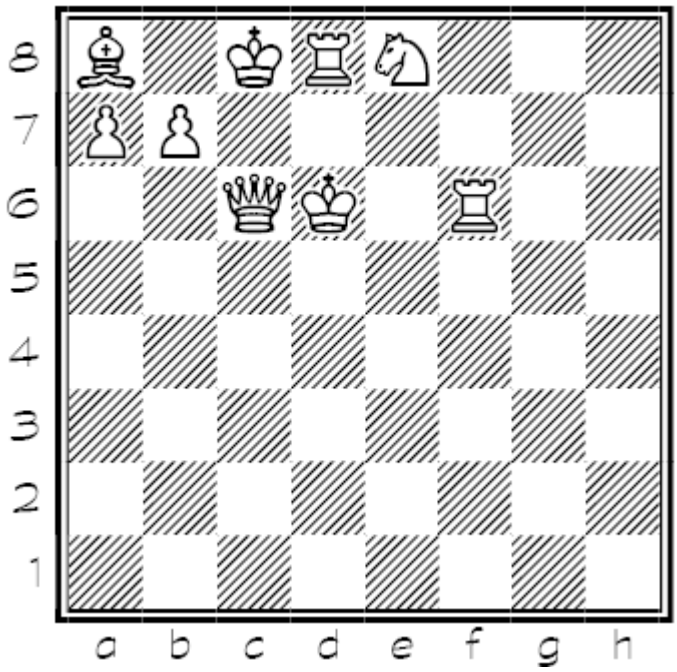
Hay una torre blanca invisible sobre el tablero. Sabiendo que ningún rey o dama ha movido o estado amenazado, ¿dónde está la torre blanca?

Hay 13 piezas negras sobre el tablero, y la Ta8 fue comida en la octava fila (pues la dama negra nunca se movió). Luego si un peón blanco fue comido en e6/f6 habrá sido el Ph2 que tendrá comido las dos piezas negras que faltan (los dos alfiles) para llegar a f6. Pero el Af8 no podría salir de f8 *antes* de la captura en f6, luego esto no pudo suceder. El mismo argumento nos enseña que no fue el Ph2 *promovido* que fue comido en e6 o f6: para haber promovido necesitaría comer los dos alfiles negros para llegar a h8, pero uno de ellos solo habría podido moverse después de la captura del Ph2 promovido…

Luego *las dos torres blancas originales* fueran comidas en e6 y f6, y ¡la torre blanca invisible es el Ph2 promovido! Este peón tendrá que haber promovido en h8 pues solo podía comer los dos alfiles negros para llegar a la octava fila. Como el rey negro no se movió, la nueva torre blanca no ha podido abandonar el entorno de h8. Pero entonces la torre blanca está… ¡en h7!

Problema 3 (G. Husserl, 1966)

El hecho más obvio es que los dos reyes tienen distintos colores. Pero la dama y la Td8 no pueden tener distintos colores, si no ¡los dos reyes estarían simultáneamente en jaque! Luego uno de los reyes sufre jaque doble de la dama y de la Td8. ¿Cómo puede ser?



Colorir las piezas. ¿Cuál fue la última jugada?

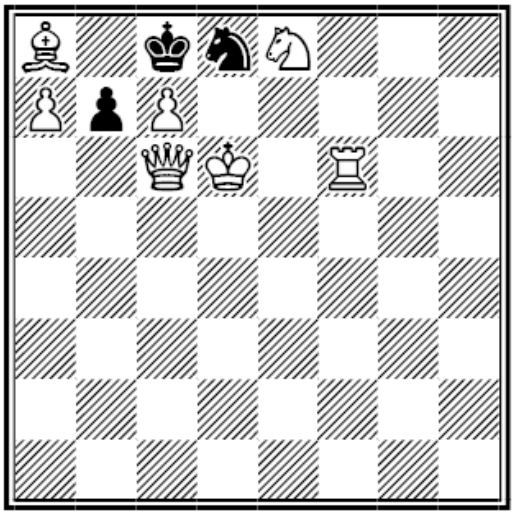
La única posibilidad es que la Td8 haya aparecido a través de la promoción de un peón que estaba en c7 y se comió alguna pieza en d8. Luego la dama y la Td8 son blancas. Como el rey negro no podría estar en jaque antes de la jugada de las blancas, el Rc8 es negro y el Rd6 es blanco.

Luego la Tf6 es blanca (o tendríamos los dos reyes en jaque). El mismo argumento nos permite concluir que el caballo es blanco.

Como el Rc8 es negro, el Pb7 tiene que ser negro también (o tendríamos un triple jaque). Pero entonces el alfil tiene que ser blanco, pues el único modo en que el podría llegar a a8 es a través de una promoción. Pero entonces el Pa7 es blanco (si fuera negro, el peón blanco no habría podido llegar a a8).

Finalmente, ¿cuál fue la última jugada? Ya sabemos que tendrá sido de las blancas (c7 x d8= T), pero ¿qué pieza negra fue comida? En la octava fila, jamás un peón. Si fuera una dama, una torre o un alfil, ¿cuál habría sido la última jugada de las negras? Es fácil convencerse de que no habría jugada posible, luego las blancas han comido un caballo en d8.

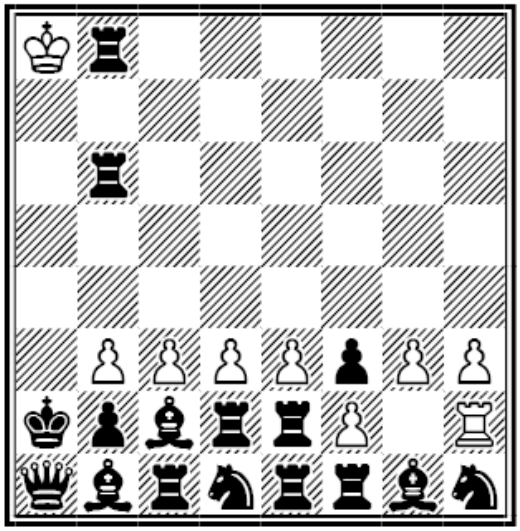
La posición antes de la última jugada de las blancas era pues:



Algunos problemas son de una gran complejidad, como muestra el siguiente ejemplo. ¡La solución es, claro está, única! ¿Como se hace a inventar un problema así?

Problema 4 (L. Ceriani y K. Fabel, 1947)

Posición del juego después de la jugada 183 de las negras. Reconstituya el partido.



CONCLUSIÓN

Espero que estos ejemplos contribuyan para convencer el lector de que el sistema formado por el tablero de ajedrez, sus piezas y sus reglas ofrece todo un mundo de posibilidades lógicas y deductivas.

Son problemas compuestos por aficionados que muchas veces ponen en sus composiciones su creatividad y incluso humor, creando esa complicidad con el lector que resulta tan agradable.

BIBLIOGRAFÍA

The Retrograde Analisis Corner, http://www.janko.at/Retros/

R. Smullyan, *Chess Mysteries of Sherlock Holmes*, Alfred A. Knopf, 1979.

R. Smullyan, *The Chess Mysteries of the Arabian Knights*, Alfred A. Knopf, 1981.