OPTIMIZACIÓN DO ÁNGULO DE LANZAMENTO DUN PESO PARA MAXIMIZAR O ALCANCE

Andrade Carpente, María
Alumna de bacharelato

Botana Trigo, Fernando
Profesor de física e química
IES Breamo (Pontedeume)

Neste traballo inténtase resolver un problema físico, no que empregamos a cinemática, buscando unha forma máis eficaz para calcular o ángulo que nun lanzamento parabólico debemos formar para alcanzar a maior distancia posible.

Se queremos facer un lanzamento parabólico dun obxecto cunha velocidade inicial = V_0, dende unha altura = h, que ángulo sería o máis axeitado para lanzalo o máis lonxe posible?

Nos desenrolos que a continuación expoñemos, desprezamos o rozamento co aire, debido ás pequenas velocidades acadadas no problema.

Utilizando a expresión do movemento uniformemente acelerado, tomando como orixe a vertical no chan do punto de lanzamento:

$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}\, t + ½\, \mathbf{g}\, t^2$

As ecuacións paramétricas da anterior ecuación vectorial no alcance, serían:

$$\left.\begin{array}{l} x = V_0 t \cos\alpha \\ 0 = h + V_0 t\, \mathrm{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} \cos\alpha = \dfrac{x}{V_0 t} & (1) \\ sen\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} g t^2 - h}{V_0 t} & (2) \end{array}\right\}$$

Para continuar queremos desfacernos do ángulo para obter x como función unicamente de t e así poder optimizar a función $z = x^2$ sendo x o alcance.

$$z = -\frac{1}{4} g^2 t^4 + \left(V_0^2 + gh\right) t^2 - h^2 \quad (3)$$

Operando e derivando obtemos tres solucións para t correspondentes a un máximo ou a un mínimo do alcance.

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\sqrt{\dfrac{2V_0^2 + 2gh}{g^2}} \end{array}\right\} \text{Non válidas} \qquad t = \sqrt{\frac{2V_0^2 + 2gh}{g^2}} \quad (4)$$

Calculamos a segunda derivada da función (3). Substituímos o t dado en (4) e se o resultado é negativo sabemos que é un máximo:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -3g^2 t^2 + 2V_0^2 + 2gh = -4\,(V_0^2 + gh)$$

Debido a que os valores $V_{0,}$ g e h son constantes positivas, o resultado obtido é negativo, entón podemos estar seguros de que é un máximo.

A continuación volvendo a ecuación (2) substituímos t polo valor (4), obtendo así o seno do ángulo en función das tres constantes que temos: V_0, g, h

$$sen\alpha = \frac{V_0}{\sqrt{2V_0^{\ 2} + 2gh}} (6)$$

Esta é a expresión que permite calcular o mellor ángulo de lanzamento para cada valor da velocidade inicial, da gravidade e da altura.

No caso de que o lanzamento fose dende o chan, o ángulo máis axeitado sempre vai ser o coñecido por todo o mundo, o ángulo de 45º, independentemente da velocidade inicial e do valor de g, como se comproba facendo h = 0 en (6):

$$sen\alpha = \frac{V_0}{\sqrt{2V_0^{\ 2} + 0}} = \frac{V_0}{V_0\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \alpha = 45º$$

Para calcular o alcance máximo volvemos a ecuación (1) e substituímos t polo valor (4) e o cos α por $\sqrt{1 - sen^2\alpha}$, substituíndo tamén nesta o sen α polo valor (6). Deste xeito obtemos o alcance en función da velocidade inicial, da altura e da gravidade:

$$x = V_0 \sqrt{\frac{V_0^{\ 4} + 3V_0^{\ 2}gh + 2g^2h^2}{V_0^{\ 2}g^2 + g^3h}} (7)$$

Esta sería a distancia máxima que alcanzaríamos.

No caso dun lanzamento dende o chan, facendo por tanto h = 0 en (7), obteríamos:

$$x = V_0 \sqrt{\frac{V_0^4}{V_0^2 g^2}} = \frac{V_0^2}{g}$$

Esta é a coñecida expresión do máximo alcance dende o chan.

Aplicación a uns casos concretos

Datos	**Tempo**	**Ángulo**	**Alcance**
V_0= 12m/s; g = 9.8m/s²; h = 2m	1.846s	41.56º	16.57m
V_0 = 12m/s; g = 1.62m/s²; h = 2m	10.593s	44.37º	90.87m
V_0 = 4m/s; g = 9.8m/s²; h = 2m	0.861s	28.30º	3.033m
V_0 = 12m/s²; g = 9.8m/s²; h = 100m	4.838s	14.66º	56.17m

Concluíndo, como podemos observar na táboa tanto ángulo óptimo de lanzamento como o alcance dependen das tres constantes dadas que son a velocidade inicial, a gravidade e a altura, de xeito que o ángulo óptimo aproxímase máis a 45º canto maior sexa a velocidade de lanzamento e canto menores sexan a aceleración da gravidade e a altura de lanzamento. Ademais o ángulo óptimo de lanzamento farase máis próximo á horizontal canto menor sexa a velocidade inicial de lanzamento, maior a altura desde a que se lanza e maior a aceleración da gravidade.