# LIMITE NO INFINITO DE ALGUMAS EXPRESSÕES IRRACIONAIS INDETERMINADAS

**Campoy Vázquez, Carlos**
*Universidade da Corunha*
*Área de Electromagnetismo - Departamento de Física.*
*Escola Universitária de Arquitectura Técnica.*
*Campus da Zapateira. Corunha.*

## RESUMO

Um dos exercícios clássicos de cálculo de limites de funções, consiste em calcular o de uma diferença de raízes quadradas de polinómios numa variável, quando esta tende a infinito. O procedimento que se utiliza habitualmente consiste em transformar em soma a diferença de raízes, o qual se consegue multiplicando e dividindo pelo conjugado. De este modo some-se a indeterminação do tipo $\infty - \infty$. O objectivo do presente trabalho é apresentar uma generalização de este procedimento para que atinja a diferenças de raízes, não apenas quadradas, mas de índices arbitrários.

## APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Sejam dados dous polinómios em $x$: $A$ e $B$ cujos graus são: $\partial A = \alpha$ e $\partial B = \beta$

Chamo $a \equiv \sqrt[p]{A}$ e $b \equiv \sqrt[p]{B}$ . Então o nosso problema será calcular o limite:

$$L = \lim_{x \to \infty}(a - b) = \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt[p]{A} - \sqrt[q]{B}\right)$$

Este limite calcula-se com facilidade nalguns casos: $\frac{\alpha}{p} > \frac{\beta}{q} \Rightarrow L = +\infty$ ; $\frac{\alpha}{p} < \frac{\beta}{q} \Rightarrow L = -\infty$

mas quando $\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q}$ aparece a expressão indeterminada $\infty - \infty$

## CALCULO DO LIMITE

No trabalho demonstra-se para estas últimas, a seguinte fórmula (válida apenas para polinómios mónicos, quer dizer, com coeficiente do monómio de maior grau igual a 1)

$$\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt[p]{A} - \sqrt[q]{B}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{A^q - B^p}{n \cdot x^\nu} \qquad \alpha \cdot q - \frac{\beta}{q} \equiv \nu \qquad n = p \cdot q$$

## ALGUNS EXEMPLOS

Com a fórmula obtida no ponto anterior, calculam-se rapidamente os limites de expressões que cumprem as condições indicadas acima. Por exemplo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+5}-\sqrt[3]{x^3+2x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-5x+5\right)^3-\left(x^3+2x^2\right)^2}{6x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-19x^5+86x^4\cdots}{6x^5}=-\frac{19}{6}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-\sqrt[4]{x^4+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3+2x^2\right)^4-\left(x^4+x\right)^3}{12x^{11}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^{11}+24x^{10}\cdots}{12x^{11}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt[4]{x^6-x^{9/2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3+x\right)^4-\left(x^6-x^{9/2}\right)^2}{8x^{21/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{21/2}+4x^{10}\cdots}{8x^{21/2}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt[4]{x^6-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^3+x^2\right)^4-\left(x^6-1\right)^2}{8x^{21/2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{11}+6x^{10}+4x^9+\cdots}{8x^{21/2}}=\infty$$

## CASO GERAL

Se os coeficientes dos termos de maior grau dos polinómios $A$ e $B$ são $k_A$ e $k_B$, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[p]{A}-\sqrt[q]{B}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{A^q-B^p}{\sum_{i=1}^{n}\left(k_A^{\frac{n-i}{p}}\cdot k_B^{\frac{i-1}{q}}\right)\cdot x^{\nu}}$$

Eis um exemplo para esta fórmula, com certeza, um processo mais enfadonho que nos casos anteriores:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+5}-\sqrt[3]{8x^3+2x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2-5x+5\right)^3-\left(8x^3+2x^2\right)^2}{192x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-272x^5+536x^4\cdots}{192x^5}=-\frac{272}{192}=-\frac{17}{12}$$

Para o coeficiente do denominador fez-se o cálculo:

$$\sum_{i=1}^{6}4^{(6-i)/2}\cdot 8^{(i-1)/3}=4^{5/2}+4^{4/2}\cdot 8^{1/3}+4^{3/2}\cdot 8^{2/3}+4^{2/2}\cdot 8^{3/3}+4^{1/2}\cdot 8^{4/3}+8^{5/3}=192$$

## CONCLUSSÃO

Não é este o tipo de coisas que se fazem no ensino secundário, mas tecnicamente o aluno do último ano tem os conhecimentos necessários para empreendê-las. É verdade que estes, e muitos outros limites que eles devem calcular, não têm mais interesse que a pura ginástica operativa. Porém, não é isso o objectivo de este trabalho, senão o de fornecer um motivo de *investigação guiada* para ser acometida pelos alunos mais avantajados. Propor-lhes para calcularem o 1º exemplo e pedir-lhes que procurem alguma via inspirada pela fórmula $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ que é válida no exercício elementar que eles já têm feito mais vezes, daria matéria para a realização de um seminário produtivo.