Grupo XeoDin

Toma de contacto con GeoGebra 4. Elaboración de materiais curriculares de matemáticas para secundaria

XXIV Congreso ENCIGA

Larrosa Cañestro, Ignacio[1]; Gesteira Losada, Esperanza[2]; Pereiro Carbajo, Débora[2]; Rodríguez Somoza, Aia[3]; Zacarías Maceiras, Fernando[4]; de la Torre Fernández, Enrique[5]

[1]IES Rafael Dieste, A Coruña; [2]IES Sánchez Cantón, Pontevedra; [3]CPI de Mondariz; [4]IES As Mariñas, Betanzos; [5]Fac. de CC. da Educación, UdC (**Grupo XeoDin**)

1. Descrición do programa

Geogebra é un software de Xeometría Dinámica:

- Libre: Pódese descargar libremente de http://www.geogebra.org, podéndose acceder ata ao código fonte do programa.

- Multiplataforma: Funciona en Windows, Linux, Mac OS X, e en xeral en calquera que soporte Java (case todas).

O apelativo "**Dinámica**" quere dicir que permite realizar construcións nas que uns elementos (**obxectos dependentes**) dependen doutros previos, de maneira que ao modificar estes, modifícanse de forma consecuente e automática os que dependen deles. Os que non dependen de ningún outro, son **obxectos libres.** Estes obxectos poden ser puntos, rectas, segmentos, vectores, polígonos, números, circunferencias, cónicas, curvas paramétricas, funcións, textos, ... Todos os obxectos teñen un nome (asignado polo programa segundo certas regras, aínda que podemos cambialo).

Pero non só é xeometría, tamén nos permite traballar a álxebra, entendida en sentido amplo: álxebra, xeometría analítica, cálculo, estatística, ... Aínda que se o queremos, pode parecer puramente xeométrico.

Ademais, permite exportar moi facilmente as construcións realizadas como páxinas web, conservando todo o seu dinamismo. Isto permite publicalas en Internet e usalas en calquera computador con calquera explorador web que teña **Java** instalado.

Neste momento podemos manipular unha versión da última actualización da versión 3.2 coa que traballamos normalmente á versión 4.0, na que se introducen unha importante serie de novas ferramentas, opcións de menús e outras novedades moi interesantes, das que destacamos só as máis sinxelas e relevantes.

Enlace a descarga de GeoGebra 4.0:

GeoGebra
4.0 Beta Release

2. Zonas da pantalla de GeoGebra

A pantalla de GeoGebra divídese en seis zonas:

- Na parte superior atópanse os **Menús** e as **Ferramentas** (barra de botóns).
- Na parte central, a **Vista Alxébrica** á esquerda, a gran **Vista Gráfica** central e a **Folla de Cálculo** á dereita (oculta por defecto).
- Na parte inferior, a barra de Entrada de teclado.

A parte central, coas súas tres vistas (Alxébrica, Gráfica e Folla de Cálculo), permite a visualización de tres diferentes representacións dun obxecto (representación gráfica, alxébrica e tabular). Estas tres representacións responden ao unísono e dinamicamente a calquera cambio de valor no obxecto, sen importar como se creou este.

De principio deixarase a vista de folla de cálculo para traballar con ela algo máis adiante, xa que non aparece por defecto ao arrincar o programa e favorécese unha mellor toma de contacto con el.

2.1. Menús

Os Menús ocupan a parte superior da fiestra de GeoGebra. Despréganse ao facer clic sobre eles.

Ficheiro: Permite abrir ficheiros, gardalos, imprimir, exportar ou pechar o programa

Editar: Permite desfacer/refacer cambios, seleccionar elementos, copiar ao portapapeis ou abrir a ficha de propiedades dos elementos construídos.

Ver: Permite seleccionar que elementos do interfaz se mostran ou non: Vistas Alxébrica e de folla de cálculo, liña de entrada, eixes de coordenadas, cuadrícula, ...

Novedad GeoGebra 4: Keyboard. Un teclado virtual que pode moverse libremente.

Perspectivas: (**Novedad GeoGebra 4).** Permite elixiir as xanelas que queremos ter activas, con que ferramientas e de que xeito deben aparecer. Ademais garda tales axustes.

Opcións: Permite axustar o funcionamento do programa: Lingua, captura de puntos á cuadrícula, rotulaxe, tamaño de fonte, ... Estas opcións, excepto lingua, descártanse ao pechar a sesión, aínda que se poden almacenar de forma permanente. Tamén podemos restablecer a configuración orixinal do programa.

Ferramentas: Creación e xestión de ferramentas propias (macros) e personalización da barra de ferramentas.

Xanela: O único item é "Xanela nova", incluído no menú Ficheiro

Axuda: Dá acceso á axuda do programa, e información da versión.

2.2. Ferramentas

As Ferramentas (tamén chamadas Modos) ocupan a parte superior da fiestra de GeoGebra, xusto baixo dos menús. Corresponden aos obxectos e operacións gráficas máis usuais. Accédese a elas mediante os botóns. Cada botón visible é activable facendo clic sobre el, e inclúe unha frechiña na súa esquina inferior dereita que ao ser activada cun clic desprega todos os botóns dispoñibles relacionados co visible. Cando activamos un botón, permanece como o botón visible do seu grupo.

De esquerda a dereita, temos os grupos: Xeneral, Puntos, Direccións, Lugares, Polígonos, Circulares, Cónicas, Medicións, Transformacións, Interaccións e Escenario. Á dereita dos botóns temos un pequeno texto de axuda sobre a ferramenta actualmente seleccionada, especialmente sobre que obxectos e en que orde deben seleccionarse. Á dereita do todo, hai dúas iconas para

desfacer as últimas operacións realizadas ou refacelas, equivalentes ás pulsacións de Ctrl **Z** e **Ctrl E**.

O primeiro botón do primeiro grupo corresponde á ferramenta "Elixir e mover". É a ferramenta por defecto e á que debemos volver logo de terminar de utilizar calquera outra, ben seleccionándoa, ben pulsando a tecla de escape. Podemos **mover** calquera obxecto pola Vista Gráfica simplemente arrastrándoo co rato, sempre que o obxecto sexa desprazable (algúns obxectos non se poden mover porque están fixos por construción ou porque así o decidimos). Á vez que movemos un obxecto, podemos observar a actualización inmediata do seu valor na Vista Alxébrica. Os obxectos seleccionados con esta ferramenta, tamén poden moverse coas **teclas de frecha**, así como borrarse coa tecla **Supr**.

¡Atención! Ao borrar un obxecto borraranse todos os que dependan del (**Ctrl Z** é moi útil nestes casos).

Podemos outorgar a calquera obxecto a propiedade de fixo no seu menú contextual (clic dereito sobre el na vista gráfica ou Alxébrica). Un **obxecto fixo** non se pode mover, ata aínda que sexa **libre** ou **semilibre**. Tampouco se pode modificar, redefinir ou eliminar, sen cambiar previamente a súa condición de fixo.

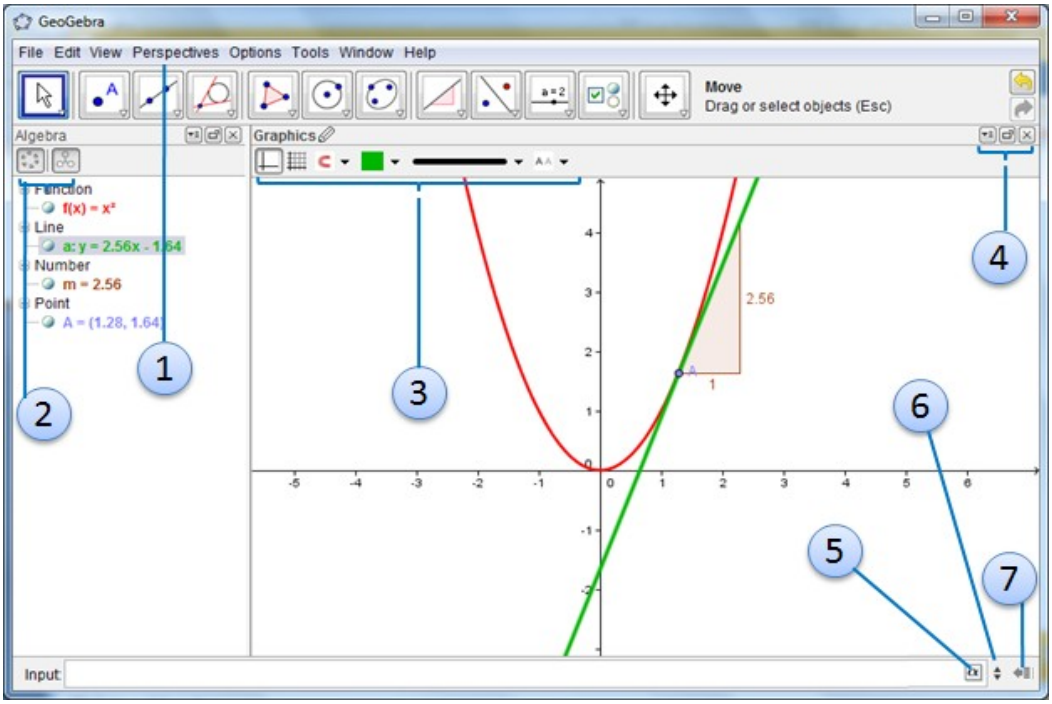
A barra de ferramentas pódese **personalizar** a través da opción "Personalizar Barra de Ferramentas" do menú Ferramentas, de forma que só aparezan as ferramentas que desexemos. Tamén podemos reagrupar e alterar a orde. Para restaurar a barra completa, na orde predefinido, basta pulsar o botón "Restablecer Barra de Ferramentas Orixinal" visible nesa mesma opción.

Esta páxina **ofrece un resumo das novas características de GeoGebra 4.0 desde a versión 3.2.**

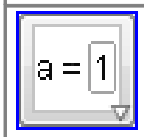
Podemos instalar GeoGebra 4.0 a través da Webstart ou da opción de descarga.

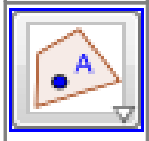
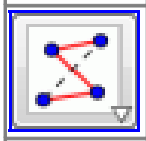
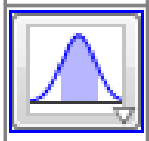
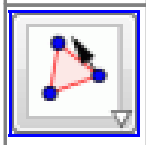
GeoGebra 4.0 non se executa co Java 1.4.2, polo que necesita instalar a versión Java 5 ou superior desde java.com

A interface de GeoGebra 4 introduce sete novos cambios:



Algunhas novas ferramentas de GeoGebra 4 son:

Iconos	Nome	Descrición
	Adosa / Libera Punto de Obxecto	**Conéctase / desconecta un punto dun obxecto en particular.** Para colocar un punto nunha ruta ou rexión faga clic nun punto libre e a continuación na ruta ou rexión. A partir de agora, o punto inmóbil pódese mover a través da Ferramenta Mover, pero só dentro da ruta ou rexión. Nota: Manteña presionada a tecla <Alt> para fixar un punto no interior dunha forma (en lugar da beira). Para separar un punto que se define como punto de ruta ou rexión, simplemente faga clic no punto. O punto será libre. Esta ferramenta complementa a de Punto en Obxecto.
	Inspector de Funcións	**Mostra as propiedades diferentes das funcións (máximo, mínimo, raíces, etc.)**
	Inserir Botón	**Executa unha serie de comandos de GeoGebra cun só clic nun botón.** A ferramenta de botón Inserir permite a inserción dun botón na vista gráfica. Cando o botón créase, o título preséntase como secuencias de comandos de GeoGebra para ser executado. Faga clic na vista de gráficos para inserir un botón. No cadro de diálogo que aparece pode configurar a súa lenda e a escritura OnClick. Vídeo demostración
	Inserir Cadro de entrada	**Insire un cadro de texto na área de debuxo GeoGebra para as entradas.** A ferramenta Cadro de entrada utilízase para cambiar de forma interactiva a definición de varios obxectos. Un obxecto existente conéctase a un cadro de entrada onde a definición do obxecto pode ser cambiada. Faga clic na vista de gráficos para inserir un campo de texto. No cadro de diálogo que aparece pode configurar a súa lenda e obxectos vinculados.
	Lapis	**Dibuja o escribe a mano alzada en la zona gráfica.** A ferramenta lapis permite ao usuario engadir notas a man alzada e debuxos á vista de gráficos. Isto fai que a ferramenta de pluma sexa especialmente **útil** cando se usa GeoGebra para **presentacións multimedia ou con lousas interactivas**. Para agregar unha nota a man alzada nunha rexión seleccionada da vista de gráficos, debuxar primeiro un rectángulo coa ferramenta Mover, ou seleccionar primeiro unha imaxe existente para escribir ou debuxar enriba. Para finalizar, seleccione outra ferramenta. GeoGebra almacena as notas que fagamos na vista gráfica como unha imaxe, polo que podemos facer calquera operación de imaxe con elas (mover, rotar, borrar, etc.)

		A cor por defecto da pluma é de cor negra, pero podemos cambiar as propiedades da pluma (cor, estilo e grosor) coa barra de estilo, se seleccionamos a primeira icona pequena que aparece na barra de Vista Gráfica. Para borrar unha parte das notas creadas na vista de gráfico coa ferramenta Lapis, presione e manteña presionado o botón dereito do rato mentres se move nas notas que desexa eliminar. Completarase o borrado cando se solta o botón do rato.
	Punto en Objecto	**Crea un punto nunha rexión ou no seu perímetro.** Para crear un punto que se fixa a un obxecto, fai clic no el botón da ferramenta e a continuación no obxecto. Este novo punto se pode mover a través da ferramenta Mover pero só dentro do obxecto. Para poner un punto no interior dun círculo ou nunha elipse, será necesario que a súa opacidade sea maior que 0. Se prememos no perímetro dun objecto (por exemplo, Círculo, Elipse, Polígono), entón o punto fixarase no perímetro da rexión e non no seu interior.
	Poligonal	**Crea una poligonal abierta entre varios puntos.** Para crear a poligonal aberta é preciso que o último punto no que facemos clic sexa o primeiro da poligonal.
	Calculadora de Probabilidad	**Calcula e representa probabilidades de diferentes distribucións discretas e continuas.** Permite seleccionar o tipo de distribución e modificar os seus parámetros característicos. Calcula probabilidades de intervalos unilaterias e bilaterais. Tamén representa a función de distribución. Os resultados pódense redondear ata 15 decimais e ata 15 cifras significativas. A gráfica pode exportarse como imaxe ao portapeis ou gardala. Tamén podemos inserila na zona gráfica e manipular nela os extremos dos intervalos.
	Polígono ríxido	**Crea un polígono cuxa forma non se pode cambiar. Este polígono se traslada arrastrando o seu primeiro vértice ou premendo no seu interior e gira arrastrando o segundo vértice.** Se crea premendo sucesivamente en a lo menos tres puntos que serán os vértices do polígono. A continuación temos que clicar de novo no primeiro punto de nuevo para pechar o polígono.
	Vértice del polígono	**Crea un polígono que se pode trasladar premendo no primeiro vértice ou no seu interior**. Modifícase a súa forma arrastrando calquera dos demáis vértices.
	Número Complexo	**Crea un punto na zona gráfica de coordenadas x + yi** Vídeo demostración

	Crear Lista	**Crea unha lista de obxectos.**

2.3. Vista Gráfica

A Vista Gráfica ocupa a parte central. Nela aparecen os obxectos gráficos. Por defecto, ocupa a maior parte da pantalla. Non se pode ocultar, aínda que si se pode reducir ampliando a Vista Alxébrica ou a Folla de Cálculo.

Sobre a Vista Gráfica pódense representar directamente obxectos xeométricos elixindo a Ferramenta desexada co rato. É aconsellable, mentres non se domine cada ferramenta, atender ao texto de axuda que aparece na barra de ferramentas. Calquera obxecto xeométrico (non se inclúen textos e imaxes) creado na Vista Gráfica terá a súa representación alxébrica na Vista Alxébrica.

Facendo clic dereito sobre calquera obxecto, accedemos ao menú contextual do obxecto, que nos permite ver e modificar as súas propiedades.

Tamén podemos **ocultar** ou mostrar calquera obxecto na Vista Gráfica, usando a ferramenta **Oculta-Obxecto** (no último panel de botóns, o correspondente a Escenario), ben mediante o menú contextual (facendo clic dereito sobre o obxecto) ou mediante un control na Vista Alxébrica. Tamén se poden ocultar e mostrar obxectos a vontade creando unha **Caixa de verificación**.

> Un **dobre clic** da ferramenta **Oculta-Obxecto** sobre a Vista Gráfica deixará visibles todos os obxectos.

A Vista Gráfica é ilimitada, aínda que loxicamente só unha parte é visible. Para **axustar** a parte visible da Vista Gráfica dispomos de varios recursos:

- A ferramenta Mover zona gráfica.
- As ferramentas **Achegamento** e **Afastamento** (a posición do punteiro no momento de facer clic determina o centro do zoom).
- A roda do rato.
- Atallos de teclado: **Ctrl +** e **Ctrl –** (teclado alfabético)
- Usando o menú contextual da Vista Gráfica (clic dereito).
- Enmarcando unha rexión da Vista Gráfica mediante o arrastre do rato mentres se mantén pulsada a tecla dereita do rato.

Tamén podemos mostrar ou ocultar os eixes de coordenadas e a cuadrícula usando o menú Vista ou o menú contextual da zona gráfica.

2.4. Vista Alxébrica

A Vista Alxébrica ocupa a parte central esquerda. Pódese ocultar ou mostrar desde o menú **Vista**. Por defecto, atópase visible. Nela aparecen os nomes e os valores de case todos os obxectos; non aparecen nin os textos nin as imaxes. Desde o menú Opcións/Álxebra pódese elixir que se presente o valor do obxecto, a súa definición ou o comando que o crea na liña de entrada.

Na Vista Alxébrica hai tres cartafois, aínda que o cartafol de Obxectos Auxiliares poida atoparse oculto (en tal caso, pódese facer visible desde o menú Ver):

- "**Obxectos Libres**". Contén os obxectos que non dependen de ningún outro valor. É dicir, os **puntos libres** e calquera obxecto definido sen usar obxectos xa construídos: números, funcións, rectas, curvas introducidas mediante ecuacións, ...
- "**Obxectos Dependentes**". Contén o resto dos obxectos, ata aínda que sexan desprazables (pero non libres) ou sexan **puntos semilibres**, que son aqueles que se poden mover libremente noutro obxecto xeométrico (segmento, recta, circunferencia...). Obxectos desprazables son os que están construídos a partir de puntos libres, e que non fixemos expresamente. Ao desprazalos, arrastran consigo os puntos libres que os definen.
- "**Obxectos Auxiliares**". Contén calquera obxecto, libre ou dependente, que queiramos ocultar da vista Alxébrica para alixeirala ou por calquera razón. Este cartafol normalmente está oculto.

Cada cartafol pode despregarse ou repregarse facendo dobre clic no seu nome. O pequeno círculo á esquerda de cada obxecto informa sobre o seu estado actual de visibilidade (exposto, oculto). Basta facer clic sobre esta icona para cambiar este estado.

Os obxectos aparecen co mesmo cor que teñen na Vista Gráfica. Por defecto, os puntos libres aparecen con cor azul intenso, os puntos semilibres en azul pálido, os ángulos e listas en verde escuro, e o resto de obxectos en negro ou gris escuro.

2.5. Folla de Cálculo

A Folla de Cálculo ocupa a parte central dereita. Pódese ocultar ou mostrar desde o menú **Ver**. Por defecto, atópase oculta. É unha potente ferramenta auxiliar que permite crear e interactuar cos obxectos gráficos de forma tabular, ou pegar e copiar táboas.

Cada cela da Folla de Cálculo posúe un nome único (A1, C4,...) que serve de vínculo automático co obxecto que posúa o mesmo nome. Ese nome pode usarse en expresións e comandos como referencia ao valor que conteña cada cela.

Cada cela admite calquera comando, expresión ou operación aceptada por GeoGebra. O obxecto creado nunha cela tomará o nome dela e a súa representación gráfica visualizarase na Vista Gráfica. De forma predefinida, os obxectos creados na Folla de Cálculo clasifícanse como Obxectos Auxiliares.

Con todo, non ten a potencia dunha folla de cálculo como Calc ou Excel.

- **Practica de manipulación 0: Uso inicial de ferramentas básicas..**

Obxectivos:

Toma de contacto coas ferramentas de GeoGebra.

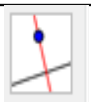
Uso dos conceptos de coordenadas cartesianas, recta, perpendicular, triángulo, triángulo rectángulo, ...

Análise dinámico da construción variando os datos iniciais.

Opcións xerais:

- Comezo dun Novo Ficheiro.

Ferramentas e comandos:

	Mover		Novo punto
	Recta pasando por dous puntos		Recta perpendicular
	Polígono		Adosa/Libera punto

Construción dun triángulo rectángulo (dinámico).

No menú de Ficheiro elixir Novo (só se pretende baleirar calquera contido anterior).

Premer na ferramenta Novo punto para activala.

Premer na zona gráfica nos arredores do punto (-2,1)

Premer noutro lugar calquera da zona gráfica.

Premer na ferramenta Recta pasando por dous puntos para activala.

Premer en A e logo en B para ter a recta que os contén.

Premer en Recta perpendicular.

Premer en B e premer en calquera outro lugar da recta debuxada para ter a perpendicular pasando por B.

Premer na ferramenta Polígono para activala.

Premer en A, premer en B, premer nun lugar calquera da perpendicular distinto de B e premer novamente en A para ter o triangulo definido por A, B e un punto da perpendicular.

Premer na Ferramenta Mover para activala. Premer en A e sen soltalo, arrastrar o rato. Facer o mesmo con B e con C e observar os resultados.

Premer na ferramenta Adosa/Libera punto e a continuación facemos clic no punto C.

act_01_introducion_pm00

2.6. Barra de Entrada

A barra de Entrada ocupa a parte inferior. Pódese ocultar ou mostrar desde o menú **Vista**. Por defecto, atópase visible. Permite introducir directamente desde o teclado números, operacións, coordenadas, ecuacións e comandos.

Está composta, de esquerda a dereita, polo botón de Axuda á Entrada, o campo de Entrada e tres listas despregables con: símbolos, operador e funcións; letras gregas; e comandos.

Basta facer un clic sobre o campo de Entrada para situar o cursor nel e comezar a teclear. Para aplicar o texto introducido púlsase a tecla **Intro**.

Esa entrada reflectirase inmediatamente nas Vista Alxébrica e Gráfica (se se sitúa fóra dos límites da zona visible da Vista Gráfica, haberá que realizar un zoom de afastamento para visualizara).

Se optamos por introducir un comando, xa sexa tecleando o seu nome ou elixíndoo da lista despregable, podemos pulsar a tecla **F1** para coñecer a súa sintaxe. Segundo imos introducindo o nome, vainos ofrecendo nomes de comando completos que coinciden co que levamos tecleado, seguidos por corchetes de apertura e peche []. Podemos pulsar **Intro** para aceptalo ou continuar tecleando o nome que nos interesa. Os argumentos do comando, debemos introducilos entre os corchetes, separados por comas.

Coas teclas de frecha arriba e frecha abaixo pódese navegar polas entradas realizadas. Calquera delas pódese editar e volver introducir pulsando **Intro**.

- Practica de manipulación 1: **Uso inicial da barra de entrada**

Novedades en Geogebra 4: Representación de intervalos e inecuacións.

Escribe na barra de entrada: 2<x <=5. Intro.

Escribe 1<= y < 3. Intro.

Escribe 2x-y<=1. Intro.

Modifica as cores dos intervalos e rexións.

Escribe y> x^2

Proba a opción transparencia.

Abre un arquivo novo. Escribe na barra de entrada: *(x>y)&&(x+y<3)*

Fai doble clic na xa expresión da xanela alxébrica e modifica os coficientes. Intro.

Escribe *x^2+y^2-x*y > 5. Intro.*

- **Practica de manipulación 2:** **Uso inicial das ferramentas**

Novedades en Geogebra 4: Ferramenta Poligonal, Lapis

Practica 1:

Debuxa unha poligonal aberta con 5 puntos. Modifica a cor e o tipo de liña. Move a poligonal. Intro.

Coa ferramenta Mover, selecciona un cadrado que enmarque a poligonal.

Preme no botón Lapis. Escribe a os números 1, 2 3, 4 enriba dos segmentos da poligonal.

Preme na ferramenta Mover e fai clic no cadrado da poligonal. Poderás movelo.

Preme de novo na ferramenta Lapis e no botón dereito do rato. Borra un dos números e solta o botón dereito.

Fíxate na vista alxébrica. A imaxe está gardada.

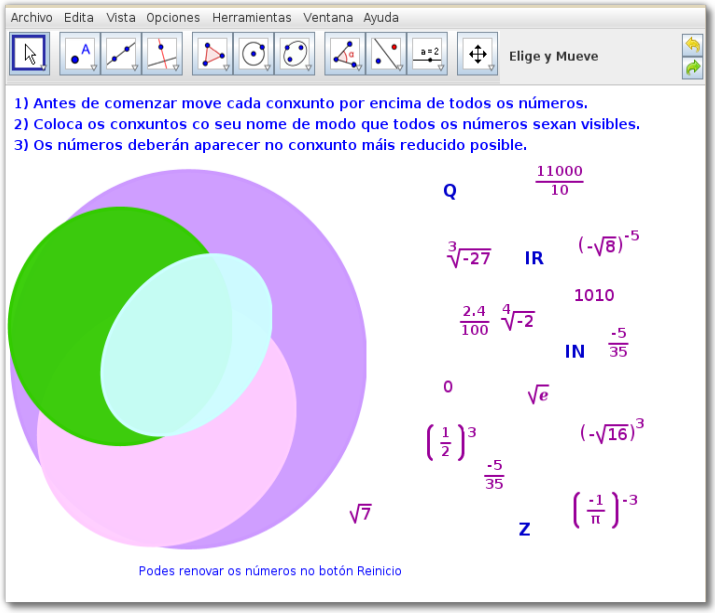
Preme outra vez na ferramenta Lapis, e escribe libremente na zona gráfica. Observa a vista alxébrica. Aparece unha nova imaxe.

Clasificación de números reais

XXIV Congreso ENCIGA

Resumo:

Para distinguir os números naturais, enteiros, e racionais imos clasificalos en diferentes conxuntos superpostos, de tal xeito que os números que non pertenezan ao conxunto correspondente queden ocultos debaixo. Preténdese que o alumnado aprenda a clasificar de modo autónomo unha serie de números reais no seu respectivo conxunto.



Utilizando a folla de cálculo e creando listas, imos conseguir que os números se modifiquen cada vez que se reinicie a actividade. Logramos así que esta sexa máis dinámica e motivadora.

Esta actividade pode completarse engadindo números irracionais e complexos.

1. Abrimos un ficheiro novo ou unha xanela nova (*Ficheiro/Nova xanela, ou Ficheiro/Novo ou Xanela/Nova Xanela*), maximizándoa se é necesario.
2. Ocultamos a cuadrícula (*Ver/Grade*) e ocultamos os eixes (*Ver/Eixes*).
3. En *Opcións/Rotulaxe* escollemos *Só novos puntos*.
4. Imos construír o conxunto que corresponderá aos números **Racionais**. Creamos dous novos puntos, A e B separados unha distancia de 3 cm: Na barra de ferramentas, prememos no botón *Novo Punto,* dúas veces.
5. Medimos a distancia entre os puntos: Prememos no botón *Distancia ou lonxitude*, e facemos clic nos puntos A e B. Desprazamos un dos puntos ata que a distancia sexa de 5 cm.
6. Na barra de ferramentas, prememos no botón *Circunferencia de centro dado pasando por un punto*. Facemos clic no centro A, pasando por B.

7. Colocamos o punteiro *Mover* encima da distancia AB e borramos $\overline{AB}$, *(Tecla Supr),* e comprobamos que podemos mover a circunferencia co punteiro.

8. Situamos o punteiro encima da circunferencia e facemos clic no botón dereito do rato. No menú emerxente seleccionamos *Propiedades*.

   a) Na pestaña *Básico*, en *Nome* escribimos *Racionais*

   b) Na pestana *Cor*, eliximos *(204, 153, 255)* (fila 2 e columna 11 da paleta de cores) .

   c) Na pestana *Estilo*, *Grosor de liña* 7, en *Recheo* Standard, e *Opacity* 95.

   d) Na pestana *Avanzado*, *Capa:1* e a continuación *Pechar*.

9. Ocultamos os puntos A e B:

   Opción a) Na Xanela de álxebra. Facemos clic encima dos puntos *A e B*. Comprobamos que podemos mover o círculo premendo en calquera punto do interior. ***Ocultamos a Xanela de álxebra.***

   Opción b) Facemos clic encima do punto e no menú contextual desactivamos *Amosar obxecto*. Comprobamos que podemos mover o círculo premendo en calquera punto do interior.

10. Imos construír unha elipse con focos C e D pasando por E para representar o conxunto de números ***Enteiros***. Volvemos a facer clic no botón *Novo punto*, e colocamos os tres puntos *C*, *D*, e *E* na Zona Gráfica. Medimos as distancias CD e CE. Prememos no botón *Distancia ou lonxitude*, e nos puntos correspondentes. Movemos estes puntos ata conseguir medidas aproximadas a $\overline{CD}=3.5$, $\overline{CE}=2.7$. A continuación prememos no botón *Elipse* e facemos clic nos puntos C, D e por último E. Borramos as distancias.

11. Repetimos o mesmo proceso do caso anterior. Situamos o punteiro encima da elipse e facemos clic no botón dereito do rato. No menú emerxente seleccionamos *Propiedades*.

    a) Na pestaña *Básico*, en *Nome* escribimos *Enteiros*,

    b) Na pestana *Cor*, eliximos *(255, 204, 255)* (fila 1 e columna 12 da paleta de cores) .

    c) Na pestana *Estilo*, *Grosor de liña* 7, en *Recheo* Standard e *Opacity* 95.

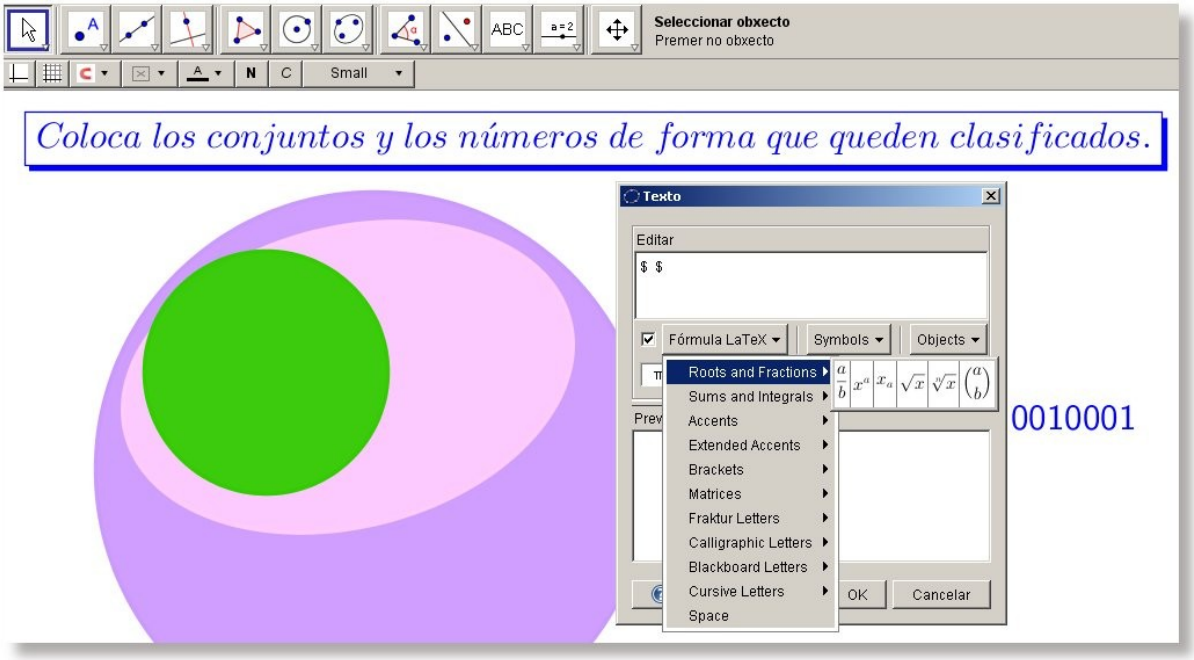
    d) Na pestana *Avanzado*, *Capa:3* e a continuación *Pechar*.

12. Ocultamos os puntos C, D e E. Comprobamos que podemos mover a elipse premendo en calquera punto do interior.

13. A continuación construímos o círculo de centro F e radio FG que corresponderá aos números **Naturais**. Situamos nun espazo baleiro da zona gráfica dous *Novos Puntos,* F, G. Medimos co botón *Distancia ou lonxitude* a distancia entre os puntos F e G, e movemos un deles ata que dita distancia sexa 2.9 aproximadamente. No botón *Circunferencia con centro dado pasando por un punto*, construímos a circunferencia de centro F pasando por G.
14. Caracterizamos agora o novo conxunto. Situamos o punteiro encima da circunferencia e facemos clic no botón dereito do rato. No menú contextual seleccionamos *Propiedades.*
    a) Na pestana *Básico*, en *Nome* escribimos *Naturais.*
    b) Na pestana *Cor*, eliximos *(51, 204, 0)* (fila 6 e columna 26 da paleta de cores) .
    c) Na pestana *Estilo, Grosor de liña* 7, en *Recheo* Standard, *Opacity* 95.
    d) Na pestana *Avanzado, Capa:5* e a continuación *Pechar*.
15. Ocultamos os puntos F, G e borramos a distancia $\overline{FG}=1.2$. Comprobamos que podemos mover o círculo premendo en calquera punto do interior.
16. No menú *Perspectives*, activamos a opción *Táboa e gráficos*. Desprazamos e/ou ampliamos o campo de visión da Folla de cálculo para traballar con máis comodidade.

NOTA: Para que os números sexan interpretados como "texto" e non aparezan en formato numérico na Folla de cálculo de GeoGebra, teremos que escribilos en formato LaTex ou entre comiñas si son sinxelos: "8" , "1010", "0", "-3", "1010010001".

Existen programas de Edición de Latex para expresións matemáticas e científicas como LyX (Windows e Linux) e Winefish Latex Editor(Linux), por exemplo. Tamén GeoGebra 4 incorpora entre as súas opcións unha ferramenta para editar expresións matemáticas algo complexas en Latex. Aínda así, as opcións que ofrece para os obxectivos desta actividade son algo laboriosas.



Entón imos recurrir a Editores de Latex Online , moi útiles cando as expresións que queremos son máis rebuscadas. Aquí temos algúns:

- *Sitmo* :

  http://www.sitmo.com/latex/

- *Latex en rincón matemático* :

  http://rinconmatematico.com/latexrender/

- *www.codecogs.com* :

  http://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php

- *thornahawk.unitedti.org* :

  http://thornahawk.unitedti.org/equationeditor/equationeditor.php

- *EquationEditor* ;

  http://www.numberempire.com/texequationeditor/equationeditor.php

- *Fórmulas Latex en Wikipedia:* http://en.wikipedia.org/wiki/Help:Formula#Syntax

Buscamos as expresións Latex correspondentes aos números que vamos a clasificar:

(co editor do www.codecogs.com, por exemplo):

Naturais: *8,* 2^0 , $3.\hat{9}$, 1010 ***Lista Naturais1***

Naturais: $\frac{15}{5}$, $\sqrt[3]{8}$, 1010010001, $\frac{11000}{10}$ ***Lista Naturais2***

Enteiros: $(-3)^7$, -3 , $(\frac{-12}{6})^5$, $\frac{-35}{5}$ ***Lista Enteiros1***

Enteiros: , $\sqrt[5]{-32}$, $(-2)^3$, $(-\sqrt{16})^3$, $(\frac{-1}{2})^{-5}$ ***Lista Enteiros2***

Racionais: 6^{-2} , $(-2)^{(-3)}$, 7,555..., , $(\frac{-1}{2})^5$ ***Lista Racionais1***

Racionais: , $\frac{-3}{5}$, $\frac{-5}{35}$, $(\frac{1}{2})^3$, $3.\hat{4}$ ***Lista Racionais2***

17. Na *Folla de cálculo,* copiamos e pegamos expresións en formato Látex dos números nas columnas correspondentes:

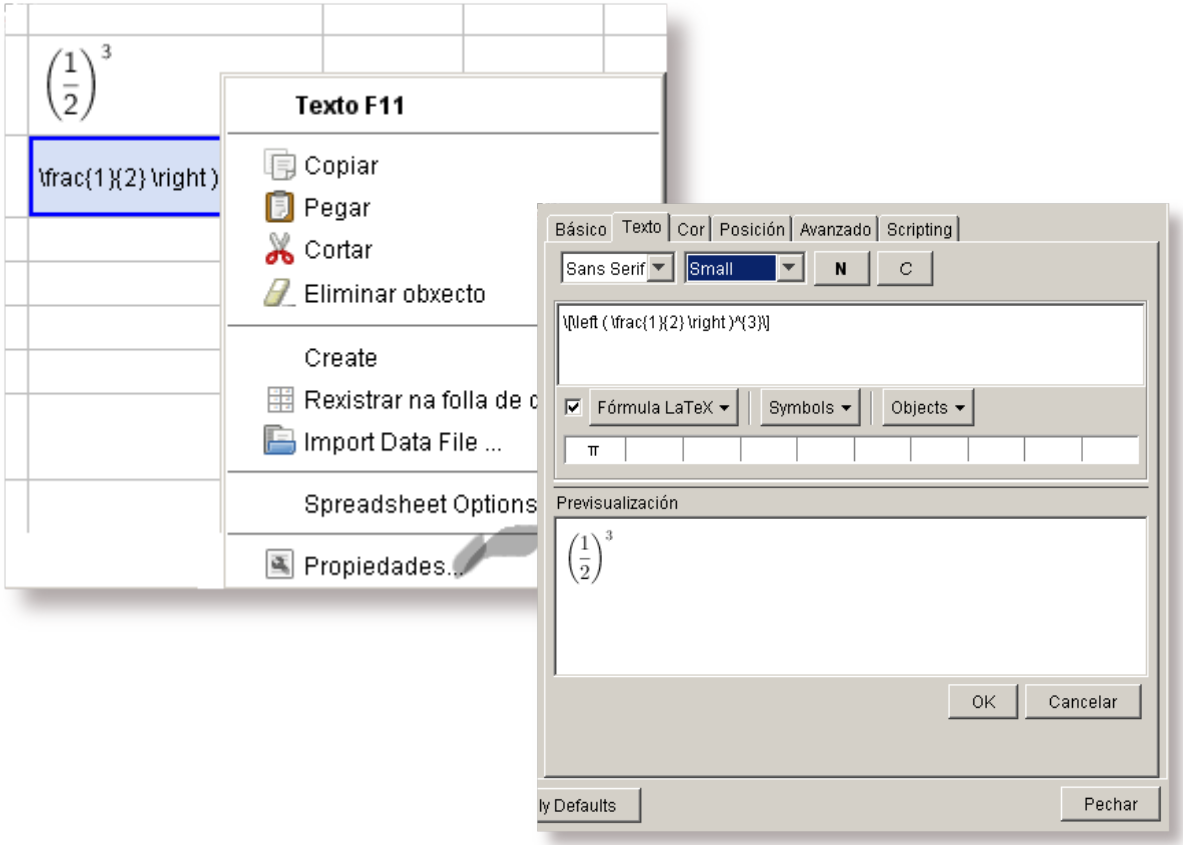
Nota: Podemos aproveitar os números que sexan similares e copiar e pegar o formato látex nas celdas da folla de cálculo. Despois, facendo doble clic nelas podemos modificar os números.

Naturais1	Enteiros1	Racionais1
“8”	\[\left (-3 \right)^{7}\]	\[6^{-2}\]
\[2^{0}\]	“-3”	\[\left (-2 \right)^{-3}\]
\[3.\hat{9}\]	\[\left (\frac{-12}{6} \right)^{5}\]	7,555...
“1010”	\[\frac{-35}{5}\]	\[\left (\frac{-1}{2} \right)^{5}\]

Naturais2	Enteiros2	Racionais2
“15/5”	\[^{\sqrt[5]{-32}}\]	\[\frac{-3}{5}\]

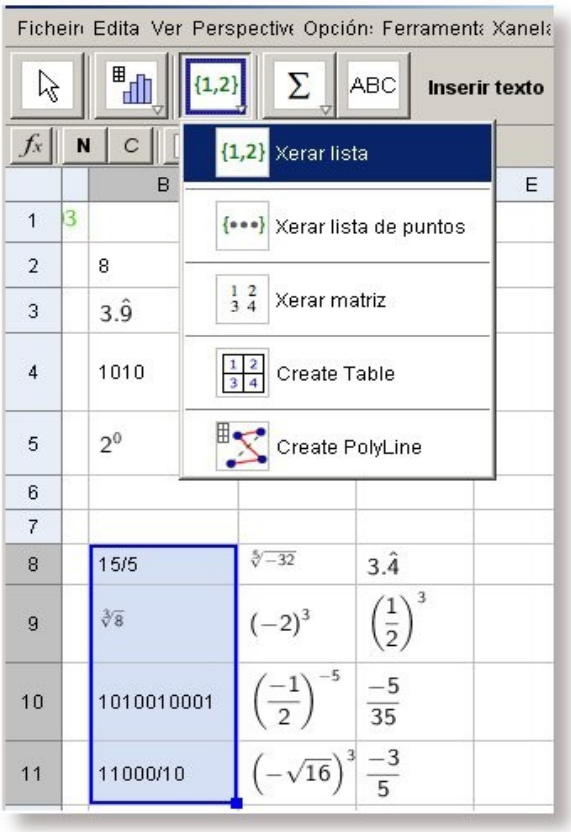
\[^{\sqrt[3]{8}}\]	\[\left (-2 \right)^{3}\]	\[\frac{-5}{35}\]
“1010010001”	\[\left (\frac{-1}{2} \right)^{-5}\]	\[\left (\frac{1}{2} \right)^{3}\]
“11000/10”	\[\left (-\sqrt{16} \right)^{3}\]	\[3.\hat{4}\]

- *A continuación, en cada celda, abrimos o menú contextual co botón dereito do rato.*

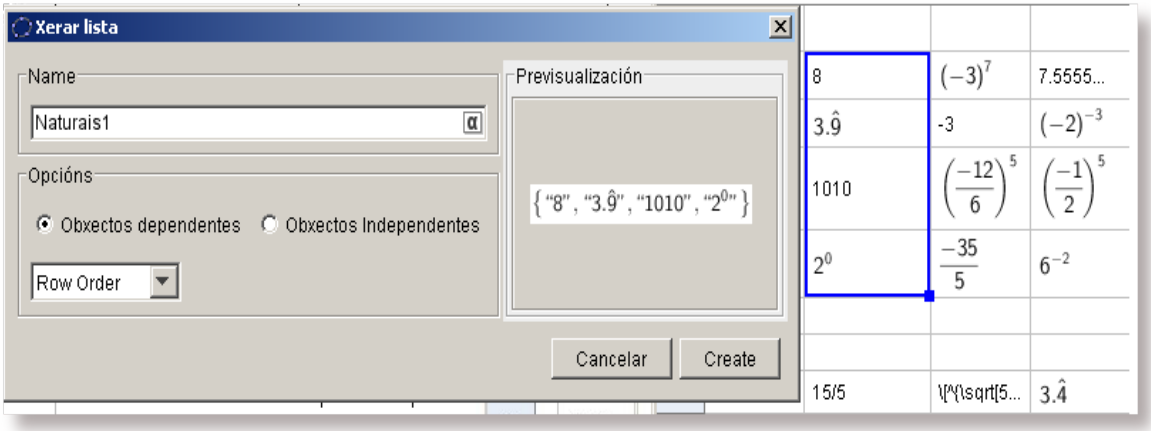


- *Prememmos en Propiedades.*
- *Na pestana Texto activamos a opción de **Fórmula Látex, Ok e Pechar**.*
- *Se o número non cambia de formato (pode ocorrer que o contido pegado non estea completo), pegamos de novo o contido do portapapeis na caixa superior.*
- *Observamos que o número aparece na caixa de Previsualización, xa no formato que queremos. E así debe aparecer reflectido inmediatamente na folla de cálculo.*

18. Imos xerar listas con cada unha das columnas da folla de cálculo:
    - Seleccionamos en cada columna as filas coas series de 4 números de cada conxunto.
    - Na barra de ferramentas da folla de cálculo, prememos no botón *Xerar lista*.
    - Escollemos a primeira opción: *Xerar lista*.



19. Nomeamos cada lista cos nomes: Naturais1, Enteiros1, Racionais1 Naturais2, Enteiros2, Racionais2, premendo no botón *Create* respectivamente.



20. En *Ver*, activamos a xanela de álxebra e comprobamos que aparecen as listas cos seus nomes e elementos correspondentes.
21. Asignamos a cada unha das Listas a capa correspondente:

    Opción1: Situamos o rato encima de cada lista/ botón dereito/*Propiedades*. Na solapa *Avanzado/Capa*,

    Opción 2: Na barra de menú *Editar/Propiedades*, despregamos *Listas*, pestana *Avanzado*

Asignamos:

Naturais1, *Naturais2*	Capa 6
Enteiros1, *Enteiros2*	Capa 4
Racionais1, *Racionais2*	Capa 2

Comprobamos se temos activa a *Barra de Entrada.* No caso contrario a activamos: Ver, barra de entradas. Imos pegar nela os textos seguintes:

Elemento[Naturais1, AleatoriaEntre[1, 4]]

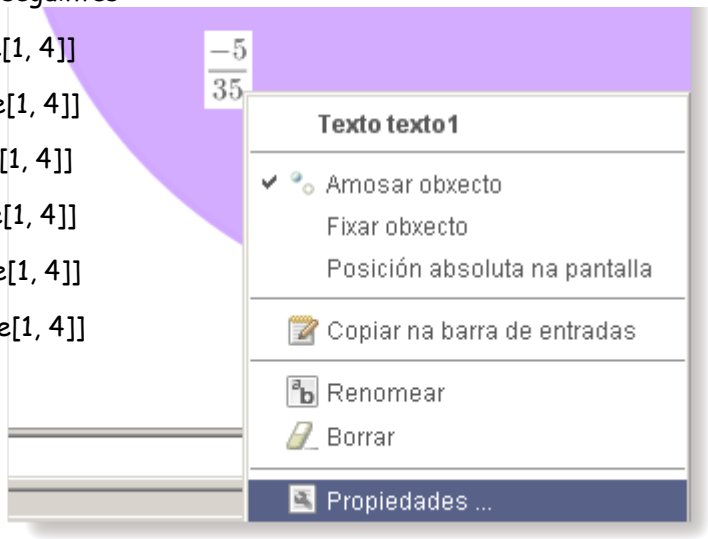
Elemento[Naturais2, AleatoriaEntre[1, 4]]

Elemento[Enteiros1, AleatoriaEntre[1, 4]]

Elemento[Enteiros2, AleatoriaEntre[1, 4]]

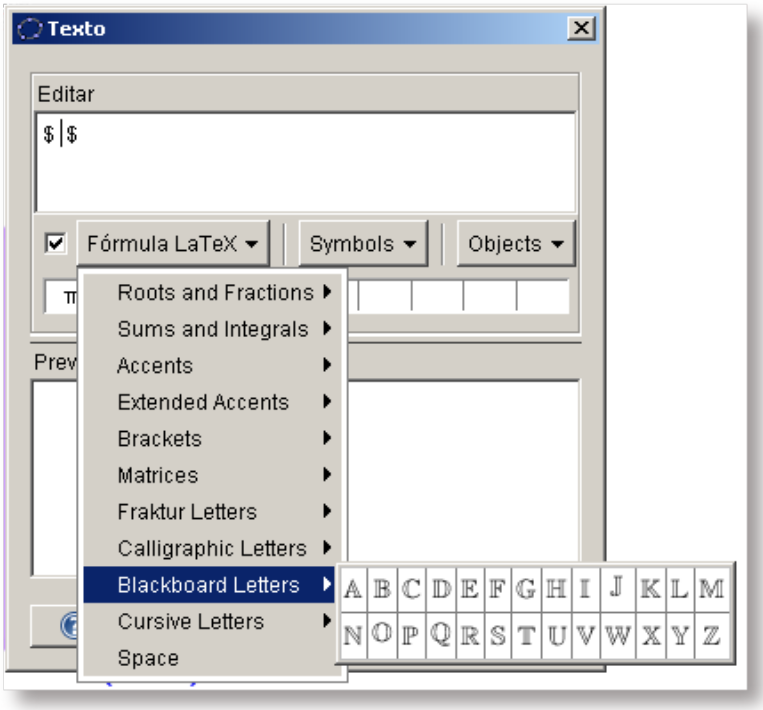
Elemento[Racionais1, AleatoriaEntre[1, 4]]

Elemento[Racionais2, AleatoriaEntre[1, 4]]



22. Unha vez que aparecen todos os números na zona gráfica dámoslle a todos o mesmo formato: *Editar/Propiedades*. Seleccionamos os textos que corresponden aos números, seleccionamos en *Texto/Negrita,* e unha *Cor (153, 0, 153),* por exemplo.
23. Comprobamos tamén que cada texto co número da lista está na capa correspondente: Clic no número co botón dereito. No Menú contextual/*Propiedades*. Na solapa *Avanzanzado/Capa.*

Naturais	Capa 6
Enteiros	Capa 4
Racionais	Capa 2



24. Engadimos os textos cos nomes dos conxuntos, N, Z, Q.
    - *Inserir Texto*
    - *Activamos Fórmula Látex e eliximos a opción Blackboard Letters: N, Ok. Repetimos con Z e Q, repectivamente.*
25. Na vista gráfica, premendo sobre eles co botón dereito accedemos o menú propiedades de texto.*Eliximos :*
    - En *Avanzado* as capas seguintes:

      N Capa 6,

      Z Capa 4

      Q Capa 2
    - En *Cor* e *Tamaño* a opción que queiramos, por exemplo: Texto/Negriña/Tamaño Large/Cor Azul (0,0, 204).

26. Imos inserir o texto da actividade. De novo, *Inserir Texto. Activamos Fórmula LaTex.* Neste menú eliximos unha das catro últimas opcións que aparecen en *Brackets. Substituímos* as xx polo texto: *Coloca os números e os conxuntos de xeito que queden clasificados correctamente.* Para que as palabras aparezan separadas temos colocar o cursor no sitio correspondente e elixir *Espazo* no menú da *Fórmula LaTex.*
27. Por último, no menú contextual deste texto poñemos *Negriña/Tamaño 14/Cor (azul*).

28. Como os números se refrescan cada vez que reinicia a actividade, imos indicalo na parte inferior da actividade: *Inserir Texto.* Esta vez non activamos a Fórmula LaTex. *C*opiamos e pegamos o seguinte texto:

    <<Podes renovar os números no botón Reinicio>>

    e dámoslle as seguintes propiedades: */Negrita/Tamaño 12/Cor (0, 0, 204) (azul),*
30. Rematamos comprobando que os números e os conxuntos correspondense coa visibilidade dacordo coa relación establecida na construción dos conxuntos de números racionais.

Razóns e funcións Trigonométricas.

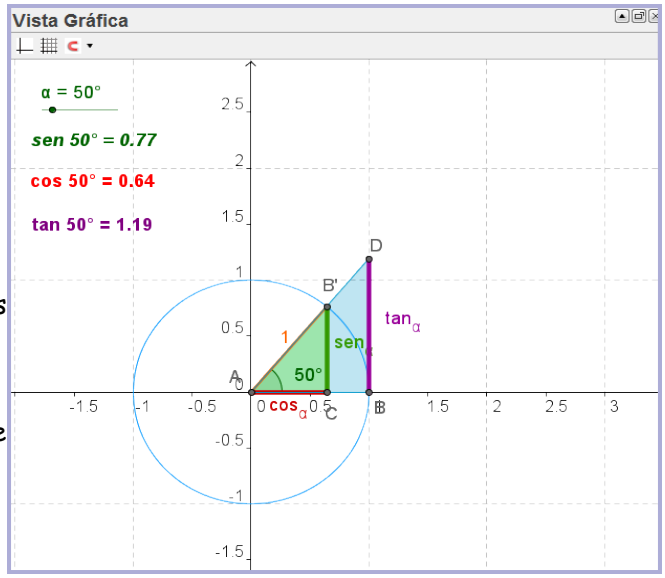
XXIV Congreso ENCIGA

Resumo

Construcción das razóns trigonométricas dun ángulo calquera comprendido entre 0° e 360° a partir dunha circunferencia de radio a unidade e representación das funcións trigonométricas a partir de estas razóns.

Análise dinámica da construción variando os datos iniciais: utilidades na extracción de conclusións, regularidades, periodicidades, ...

REPRESENTACIÓN DAS RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS SOBRE A CIRCUNFERENCIA UNITARIA



Opcións xerais:

- Opcións Lingua Galega
- Opcións de rotulaxe: Só novos puntos.
- Vista : Zona gráfica e xanela de álxebra

Representación da circunferencia unitaria e un ángulo

1. Zona Gráfica:

   Activados os Eixes e o Grade. A captura de Puntos deixámola en automático.

   Configuración da zona gráfica: escala 1:1

2. Coa ferramenta Achegar, facemos zooms de acercamento dende o punto (0,0) sen perder de vista o EixeX dende -2'5 ata 6'5.

3. Escribimos no campo de entrada 30° (o símbolo do grado escóllese da barra de símbolos, ao

carón da barra de entrada). Este ángulo gárdase por defecto na variable a. Mostramolo na zona gráfica con rotulado nome e valor.

4. Situamos un punto no EixeX: A = Punto[EixeX].

   Movemos A no EixeX ata que ocupe a posición (0,0).

5. Coa ferramenta Circunferencia con centro e raio dados, construimos a circunferencia de centro A e raio 1.

6. Definimos o punto B, translación de A segundo o vector (0,1), escribindo no campo de entrada: B = A + (1, 0)

7. Coa ferramenta Ángulo de amplitude dada, pintamos o ángulo con punto lateral B, vértice A e amplitude a (sentido antihorario). Aparecerá un punto B', rotación do punto B segundo o ángulo a.

8. Coa ferramenta Recta pasando por dous puntos, construimos a recta a, que pasa polos puntos A e B'

Construcción do triángulo rectángulo na circunferencia unitaria para representar gráficamente o seno e o coseno do ángulo.

9. Coa ferramenta Recta perpendicular, trazamos a recta b perpendicular ao EixeX pasando por B'.

10. Coa ferramenta Intersecar dous obxectos, marcamos o punto C intersección da recta co Eixe x. Ocultamos a recta b.

11. Coa ferramenta Polígono, pintamos o triángulo de vértices A, C e B'.

12. Modificamos a aparencia dos lados do triángulo ACB'.

    Para a hipotenusa mostramos como rótulo o seu valor e para o resto dos lados o seu nome. Ademáis:

    Para o lado oposto ao vértice A: cambiamoslle o nome por sen_a e cambiamos a cor a verde.

    Para o lado contigüo ao vértice A: cambiamoslle o nome por cos_a e a cor a vermello.

Textos co valor das razóns trigonométricas.

13. Na barra de entrada, definimos variables que garden o valor das razóns trigonométricas do

ángulo α:

sen= y(B')

cos= x(B')

tan= sen/cos

14. Coa ferramenta Inserir texto creamos un texto para cada razón trigonométrica:

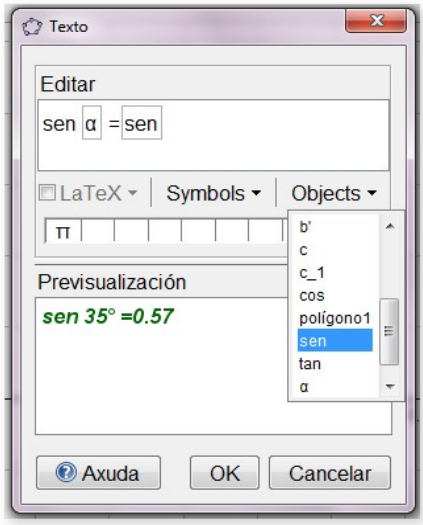
Texto seno: Escribimos sen,

logo seleccionamos o ángulo α (no despregable dos obxetos ou clicando directamente no obxeto na zona gráfica ou na xanela de álxebra)

Seguidamente escribimos o símbolo =

e seleccionamos o obxeto sen (no despregable de obxetos ou na xanela de álxebra).

Propiedades do texto: Tamaño pequeno, cor verde.



Repetimos o proceso anterior para escribir os textos que faltan:

Texto coseno: cos α = cos . Tamaño pequeno, cor vermello.

Texto tanxente: tan α = tan . Tamaño pequeno, cor violeta.

Propiedades dos textos: Posición absoluta en pantalla

Construcción do triángulo rectángulo na circunferencia unitaria que representa gráficamente a tanxente do ángulo.

15. Coa ferramenta Recta perpendicular, trazamos a recta c perpendicular ao EixeX pasando por B.

16. Marcamos o punto D intersección da recta c coa que pasa polos puntos A e B'.

17. Coa ferramenta Polígono, pintamos o triángulo ABD.

18. Aplicando a definición de tanxente de α, no triángulo rectángulo ABD, tense que a tanxente coincide coa lonxitude do segmento BD,

$$\tan\alpha = \frac{\text{catetoopostoα}}{\text{catetocontiguoα}} = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{1} = BD$$

así que convén modificar a aparencia do lado BD:

nome: tan_a rótulo: nome e cor: violeta

Mostramos o rótulo do lado BD.

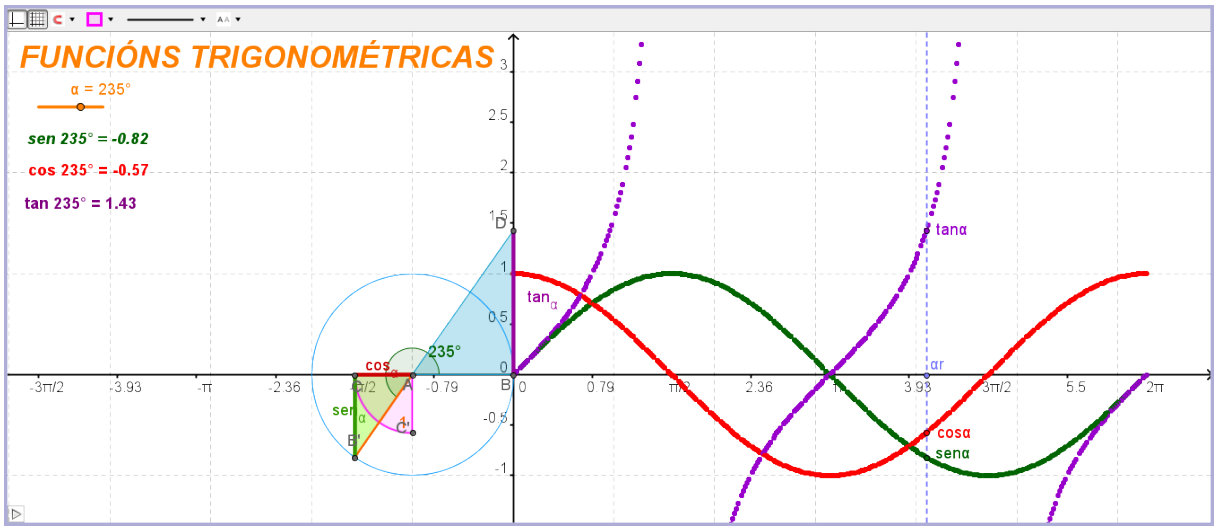
19. Ocultamos todas as rectas.

20. Mover+ndo o esvarador a podemos observar dinámicamente o comportamento das razóns trigonométricas

21. Gardamos o arquivo como razons_trigonometricas.ggb

GRÁFICA DAS FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

Considérese a función que asocia a cada ángulo a súa razón trigonométrica, para ángulos entre 0° e 360° (entre 0 e 2π radiáns)



Traslación da circunferencia unitaria unha unidade á esquerda

22. Movemos o punto A ata ocupar a posición (-1,0)

23. Para que os textos sigan sendo certos temos que modificalos en consecuencia co movemento realizado: Seleccionamos na xanela de álxebra a variable cos, prememos na tecla F3 e cando apareza a definición da variable cos, engadimos +1, é dicir

    cos = x(B') +1

24. Modificamos a escala dos eixes:

    EixeX: números separados una distancia de π/4.

    EixeY: números separados una distancia de 0.5.

Representación da función seno

25. Escribimos no campo de entrada o punto (α, sen).

    Propiedades do punto: nome: sena, rótulo: nome, cor: verde e marcamos activa rastro

26. Movendo o esvarador α, ou activando a animación automática, móstrase o rastro do punto cando o ángulo varía entre 0 e 2π.

Representación da función tanxente

27. Escribimos no campo de entrada o punto (a, tan).

    Propiedades do punto: nome: tana , rótulo: nome, cor: violeta e marcamos activa rastro

Representación da función coseno

O cos(a) correspóndese coa coordenada x de B' cando o centro da circunferencia era o (0,0). Aínda que para a construcción dos textos xa lle sumamos 1 a esta cantidade, para unha maior claridade didáctica, rotaremos x(B') 90° :

28. Rotamos C ó redor de A 90°. Escribimos na liña de entrada: C' = Rota[C, 90°, A]
29. Coa ferramenta sector circular dados centro e dous puntos construímos o sector de centro A e que pasa por C e C'.
30. Como y(C')= x(B') = cos(a), escribimos no campo de entrada o punto: (a, y(C'))

    Propiedades do novo punto: nome: cosa , rótulo: nome, cor: vermella e marcamos Activa rastro
31. Escribimos no campo de entrada (a, 0) e chamámoslle ar.
32. Coa ferramenta recta perpendicular construimos a recta perpendicular ao EixeX pasando por ar.
33. Gardamos o arquivo como funcionstrigonometricas.ggb