

Secuencias, macros, listas, ... con GeoGebra, posibilidades ilimitadas

XXIV Congreso ENCIGA

Larrosa Cañestro, Ignacio¹; Gesteira Losada, Esperanza²; Pereiro Carbajo, Débora²; Rodríguez Somoza, Aia³; Zacarías Maceiras, Fernando⁴; de la Torre Fernández, Enrique⁵

¹IES Rafael Dieste, A Coruña; ²IES Sánchez Cantón, Pontevedra; ³CPI de Mondariz; ⁴IES As Mariñas, Betanzos; ⁵Fac. de CC. da Educación, UdC ([Grupo XeoDin](#))

Resumo

O programa GeoGebra constitúe unha potente ferramenta cunha enorme utilidade didáctica na clase de matemáticas. A súa facilidade de manexo e ilimitadas posibilidades de aplicación fano idóneo para traballar contidos diversos no aula de Educación Secundaria, desde a xeometría e o álgebra, á estatística ou a plástica.

A nova versión 4 engade ademais novas ferramentas, comodidade na asignación de propiedades aos obxectos, e moitas máis novidades que enriquecen e amplían enormemente as posibilidades deste software libre.

Neste obradoiro, que parte dun coñecemento inicial de GeoGebra, elixíronse as listas e secuencias, así como a elaboración de macros, para facer varias construcións. Entre elas, unha pode recordarnos tanto unha actividade de educación plástica como as curvas envolventes, outra afronta un contido curricular como a suma das progresións xeométricas, outra aplica as listas e o comando "secuencia" para realizar un taboleiro de damas,

Introdución

O obxectivo principal deste obradoiro é o uso de secuencias e listas e a creación de macros utilizando xa a nova versión GeoGebra 4.

Os contidos matemáticos que se van a traballar nestas actividades, poden adaptarse a varios niveis, desde os explicitamente curriculares para 3º de ESO ou 1º de Bacharelato, como poden ser as progresións, ata aqueles de experimentación xeométrica como as diagonais dun polígono regular ou a actividades lúdicas como o taboleiro de damas xogable.

Desde o control do uso de GeoGebra, resultan unhas actividades de especial importancia, xa que as series ou listas e as macros teñen un campo de utilidade case ilimitado. Ademais a exportación dos arquivos como páxinas web interactivas, é aplicable a calquera arquivo de GeoGebra e posibilita a súa inclusión en páxinas web dos centros, en blogs, etc.

Actividade 1: Toma de contacto coas listas.

GeoGebra permite traballar con Listas de calquera clase de obxectos, do mesmo ou de diferente tipo. Dependendo do tipo de obxectos que conteña, poderanse facer certas operacións coa lista ou atribuírlles determinadas propiedades ao conxunto de elementos que a forman. Unha lista pódese crear relacionando obxectos preexistentes, entre chaves e separados por comas. Estas listas poden usarse en moitos comandos. Por exemplo, introducimos na fiestra gráfica catro novos puntos (Novo Punto) e logo introducimos na liña de entrada:

`lista1 = {A, B, C, D}`

E logo o comando:

`Polinomio[lista1]`

Créase e visualízase na fiestra gráfica, o polinomio de terceiro grao que pasa por eses catro puntos. Aquí estes puntos teñen "vida" independente da lista, e pódense mover e cambiar as súas propiedades individualmente. Se pola contra, introducimos na liña de entrada:

$lista2 = \{(1, 2), (3, -1), (4, 0), (5, 3)\}$

a lista aparece só na xanela de álgebra, pero podemos visualizala (aínda que non os puntos individuais), clicando no pequeno círculo á esquerda do nome da lista. Os puntos non teñen nome nin poden moverse, pero en ocasións non nos fará falta. Isto ten a vantaxe de que se son moitos obxectos (decenas, centos ou ata miles), prodúcese un importante aforro de memoria e o programa funciona mellor. Podemos crear o polinomio igual que antes, coa lista visible ou non, introducindo:

$Polinomio[lista2]$

Outra forma de crear listas, é mediante o comando Secuencia, cuxa sintaxe completa é:

$Secuencia[Expresión, Variable i, Número a, Número b, Incremento]$

Este comando establece unha lista de obxectos creados desde a expresión dada e o índice i que varía no rango que vai do número a ao b co incremento dado. Este último é opcional; se non se inclúe expresamente, toma o valor 1. Por exemplo, introducimos estes comandos:

$Secuencia[Segmento[(0, s), (8, s)], s, 0, 8]$

$Secuencia[Segmento[(s, 0), (s, 8)], s, 0, 8]$

Así, con estas dúas liñas creamos o esqueleto dun taboleiro de xadrez.

Finalmente, a nova versión GeoGebra 4 inclúe outro xeito de introducir as listas dende a folla de cálculo:

Eliximos no menú **Ver**, **Folla de cálculo**.

Nas catro primeiras celas da columna **A**, escribe catro puntos; por exemplo:

(1, 2)

(2, 5)

(-3, 4)

(5, -6)

Ao estar activa a folla de cálculo, dispónse de varias ferramentas específicas. A primeira, **Xerar lista**. Si seleccionamos as catro primeiras celas e cliqueamos sobre esta ferramenta tamén se crea a lista correspondente, na xanela de álgebra e na xanela gráfica.

Actividade 2: Ángulos decorados.

Os obxectivos desta actividade son:

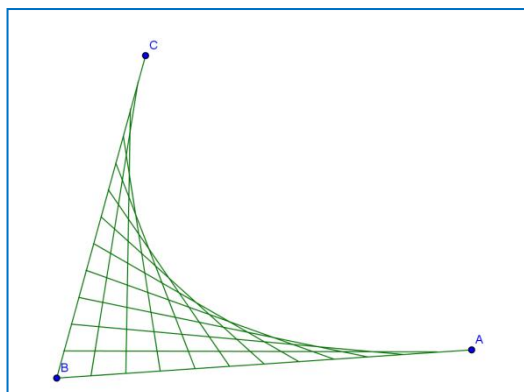
- Crear utilizando secuencias un armazón de segmentos que unan os puntos que dividen en partes iguais os lados dun ángulo.
- Crear unha ferramenta persoal (macro) para o seu uso posterior.
- Utilizar a macro creada nunha nova construción.

Pártese das seguintes opcións xerais:

- Eixos ocultos.
- Cuadrícula oculta.
- Xanela de álgebra visible (xa figura por defecto).
- Rotulado: Só novos puntos.

Creación dunha macro.

- A. Crear utilizando secuencias un armazón de segmentos que unan os puntos que dividen en partes iguais os lados dun ángulo.**



1. Liña de Entrada: $n = 12$.
2. Coa ferramenta **Novo punto** creamos tres puntos A , B e C .
3. Liña de Entrada:

$\text{Secuencia}[\text{Segmento}[A + (B - A)k / n, B + (C - B)k / n], k, 0, n]$

Isto crea unha secuencia de segmentos para os valores de k desde 0 ata n . Para $k=0$ temos o segmento AB e para $k=n$, o BC . Se agora se cambiase o valor de n , cambiaría o número de segmentos trazados.

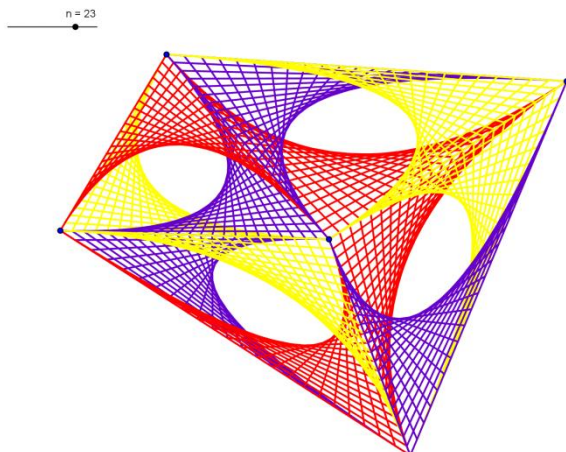
É importante resaltar a mellora na axuda para a escritura na liña de entrada que incorpora a nova versión 4 de GeoGebra.

B. Creación da ferramenta persoal (macro).

1. Gardamos a imaxe **angulo_decorado.gif** (pódese descargar en http://www.agapemacoruna.com/xeodin/encigaxxiv/angulo_decorado.gif) no disco duro, na mesma cartafol que se utilice para gardar as construcións.
2. No menú **Ferramentas**, escollemos **Crear nova ferramenta** Na pestana **Obxectos de saída** escollemos a lista **lista1**, seleccionándoa do despregable ou sinalándoa na xanela de álgebra ou gráfica.
3. Pulsamos **Seguinte** para pasar á pestana **Obxectos de entrada**. Hai que asegurarse de que figuren os puntos A , B e C e o número n , nesa orde. Se a orde é distinta, cámbiase coas iconas da dereita.
4. Pulsamos **Seguinte** para pasar á pestana **Nome e Icona**. En Nome da Ferramenta poñemos **Angulo Decorado**. Aceptamos **AnguloDecorado** para o nome do comando, e en Axuda da ferramenta escribimos **Tres puntos e un número**.
5. Pulsamos no botón **Icona** e seleccionamos o ficheiro **Angulo_decorado.GIF** que se gardou anteriormente. Despois pulsamos en **Final** e en **Aceptar** para pechar a fiestra informativa. Aparece a icona da macro na barra de ferramentas.
6. Volvemos ao menú **Ferramentas**, escollemos **Xestor de Ferramentas ...** e pulsamos en **Gardar como** Gardámolo co nome **Angulo_decorado**. A extensión **.ggt** engádese automaticamente. Así se terá a macro dispoñible para utilizala en calquera construción posterior.

C. Utilización da macro.

1. Para eliminar a macro da memoria, pechamos GeoGebra e volvemos abrílo. Establecemos as mesmas opcións xerais que antes.
2. No menú **Ficheiro**, abrimos de novo **Angulo_decorado.ggt**. Non se crea ningún obxecto na xanela gráfica nin na de álgebra, senón que simplemente engádese un botón á barra de ferramentas coa nosa macro. En xeral, ao abrir unha, ou moitas macros nunha construción, esta non se altera en ningún sentido.
3. Creamos un esvarador (**Esvarador**) de nome n , e pulsamos na opción de **Enteiro** (Integer). Queda asignado **1**, **30** e **1** ao mínimo, máximo e incremento, respectivamente. Dámoslle a n , por exemplo, o valor **20**.
4. Escollemos a ferramenta **Angulo Decorado** e marcamos tres puntos. Na fiestra que se abre, introducimos n para o número. Volvemos repetir a operación dúas veces cos mesmos puntos, pero pondo no medio cada vez un distinto (Se primeiro foron $A B C$, logo marcámolos na orde $B C A$, e



finalmente $C A B$). Podemos seguir usando repetidamente a macro con dous puntos xa construídos e un novo, e decorar as listas resultantes "ao gusto". Completamos un deseño parecido ao da figura, e gardámolo co nome Armazons.ggb.

Actividade 3: Diagonais dun polígono regular.

Os obxectivos desta actividade son:

Debuxar todas as diagonais e lados dun polígono regular de entre 3 e 30 vértices, ocupando de forma automática a maior parte da pantalla dispoñible.

A. Construción da figura.

1. Ocultamos os eixes e poñemos as opcións de rotulaxe en **Só novos puntos**.
2. Creamos un **esvarador** enteiro n , de 3 a 30.
3. Cos puntos das catro esquinas da xanela gráfica que se poden obter como **Esquina[i]**, tomando para i os valores 1, 2, 3 e 4, as funcións $x()$ e $y()$ que dan a coordenada x e y dun punto, un vector ou unha diferenza de puntos, e o comando **Mínimo[a, b]** pódese obter r , un valor igual ao 90% da metade do mínimo do ancho e o alto da xanela gráfica, escribindo na liña de entrada:

$$r = 0.9 \text{ Mínimo}[y(\text{Esquina}[4] - \text{Esquina}[1])/2, x(\text{Esquina}[2] - \text{Esquina}[1])/2]$$

4. Para obter o centro da xanela gráfica escribimos:

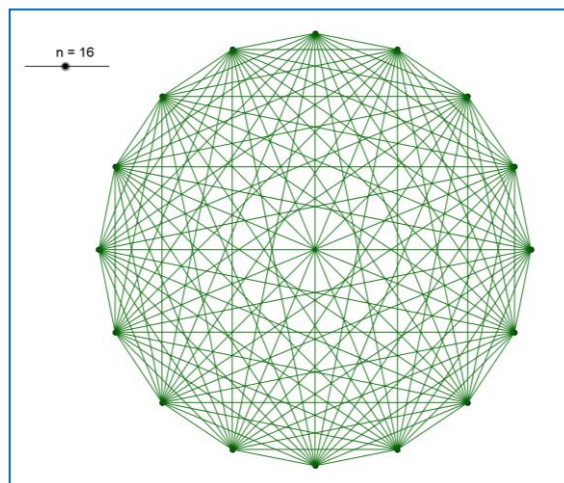
$$A = (\text{Esquina}[1] + \text{Esquina}[3])/2$$

5. Para conseguir unha lista de n puntos igualmente repartidos a unha distancia r do punto A poñemos na liña de entrada:

$$\text{lista1} = \text{Secuencia}[\text{Rotación}[A + (r, 0), 2 \pi k / n, A], k, 0, n - 1]$$

6. Mediante unha secuencia dobre, créase unha lista cos segmentos que unen todos os puntos:

$$\text{lista2} = \text{Secuencia}[\text{Secuencia}[\text{Segmento}[\text{Elemento}[\text{lista1}, i], \text{Elemento}[\text{lista1}, j]], j, i + 1, n], i, 1, n - 1]$$



Actividade 4: Suma dunha progresión xeométrica de razón $\frac{1}{4}$.

O obxectivo desta actividade é crear un applet cunha demostración visual e dinámica da suma dunha progresión xeométrica ilimitada de razón $\frac{1}{4}$. Para iso empregamos un cadrado dividido en catro cadrados iguais, e coloreamos tres deles de vermello, amarelo e azul. O cadrado restante divídese á súa vez en catro cadrados, coloreándolos como os anteriores e así sucesivamente. Logo dunhas cantas iteracións, teremos a terceira parte do cadrado inicial coloreada de vermello, a outra de amarelo e a terceira de azul, visualizando que:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{3}$$

Partimos das seguintes opcións xerais:

- Eixos ocultos
- Cuadrícula visible
- Xanela de álgebra visible
- Redondeo: 10 cifras decimais
- Rotulaxe: Agás novos obxectos
- Tamaño da fonte: 18 pt

A. Construcción da figura

1. Situamos un punto A a dúas unidades da parte superior e a 9 do bordo esquerdo, e ocultámolo. A este punto imos referir toda a construción.

2. Introducimos o lado do cadrado na liña de entrada: $a = 8$

3. Creamos un esvarador na esquina superior esquerda; dámoslle o nome n e establecemos o seu valor mínimo, máximo e incremento en 1 , 10 e 1 respectivamente. Deixámolo situado por exemplo en $n = 3$ e ocultamos o seu rótulo.

4. Creamos o cadrado de referencia introducindo na liña de entrada:

Polígono[A, A + (-a, 0), 4]

5. Indícanse os dous vértices superiores en sentido positivo (contrario ás agullas do reloxo). Cambiámoslle o sombreado a cero e a cor a un verde escuro. Ocultamos os vértices (poden verse na **Xanela de Álgebra** se activamos **Obxectos Auxiliares**).

6. Creamos a secuencia de cadrados situados na diagonal:

Secuencia[Polígono[A+(-a/2ⁱ,-a/2ⁱ),A+(-a/2⁽ⁱ⁻¹⁾,-a/2ⁱ),4],i, 1, n]

Cambiámoslle a cor a **Amarelo** ((255, 255, 0), por exemplo), o grosor do trazo a **0** e o sombreado a **75**.

7. Creamos a secuencia de cadrados situados por encima da diagonal:

Secuencia[Polígono[A + (-a/2ⁱ, 0), A + (-a/2⁽ⁱ⁻¹⁾, 0), 4], i, 1, n]

Cambiámoslle a cor a **Vermello** ((255, 0, 0), por exemplo), o grosor do trazo a **0** e o sombreado a **75**.

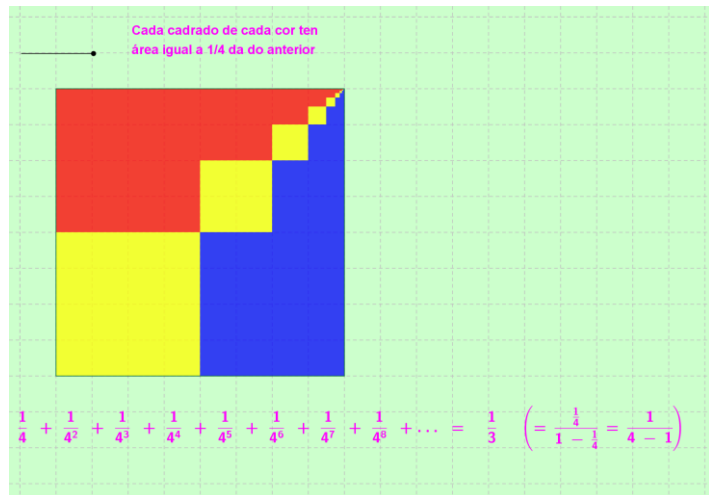
8. Creamos a secuencia de cadrados situados por baixo da diagonal:

Secuencia[Polígono[A + (0, -a/2ⁱ), A + (-a/2ⁱ, -a/2ⁱ), 4], i, 1, n]

Cambiámoslle a cor a **Azul** ((0, 0, 255), por exemplo), o grosor do trazo a **0** y o sombreado a **75**.

9. Coa ferramenta **Inserir Texto**, creamos un texto por encima do cadrado e á dereita do esvarador:

Cada cadrado de cada cor ten área igual a 1/4 da do anterior



- Pómoslle cor **Rosa** ((255, 0, 255) p.e.) e activámoslle a **negrita**.
10. Creamos o texto dinámico para a suma. Primeiro as potencias maiores que un, co signo '+':
- Secuencia[Texto["+\; \frac{ 1 }{ 4^" + (k) + "}], k, 2, 8]**
- Isto crea unha lista (**lista4**) de textos e preséntaos superpostos e sen interpretar os códigos **LaTeX**. Sen preocuparnos diso, ocultamos a lista.
11. Coa ferramenta **Inserir Texto**, creamos un texto (**texto2**) co resultado e a fórmula:
- = \; \frac{ 1 }{ 3 } \; \; \; \; \left(= \; \frac{ \frac{ 1 }{ 4 } }{ 1 \; - \; \frac{ 1 }{ 4 } } \; \; \; \; = \; \frac{ 1 }{ 4 \; - \; 1 } \right)**
- Activamos a caixa **Fórmula LaTeX** para comprobar que o resultado é o desexado, e ocultámolo.
12. Creamos unha nova lista encadeando $\frac{1}{4}$, a secuencia de textos (**lista4**), uns **puntos suspensivos** e o texto anterior (**texto2**):
- Primero[Encadena[{"\frac{ 1 }{ 4}"}, lista4, {"+\;..."}, {texto2}]], n]**
- O comando **Primero[lista, n]** selecciona os **n** primeiros termos de **lista**. Ocultamos a lista que se crea (**lista5**).
13. Introducimos na liña de entrada:
- TextoTáboa[{lista5}]**
- Copiámoslle o estilo visual do outro texto (**texto1**) e situámolo debaixo da figura.
14. Coa ferramenta **Inserir Texto**, creamos tres textos iguais co seguinte contido:
- Se[n < 10, "" + (1 / 3 (1 - 1 / 4^n)), "1/3"]**
- Dámoslles as cores amarelo, azul e vermello, e situámoslos en cadrados grandes de cor diferente.
15. Para acabar, dámoslle ao fondo de pantalla unha cor verde claro, facendo clic dereito na zona gráfica, logo en **Zona gráfica ...** e en **Cor de fondo**, escollemos un do final da primeira liña. Pechamos a xanela alxebraica, axustamos o tamaño da pantalla e deixamos o esvarador no mínimo.

B. Creación dun ficheiro html

16. Exportamos a construción, con **Ficheiro/Exportar/Folla de traballo dinámica como páxina web (html) ...** En **Título** poñemos **Suma dunha progresión xeométrica de razón $\frac{1}{4}$** , e en **Autor** o teu nome. En **Texto enriba da construción**, copiamos:
- Move o deslizador para formar e sumar unha progresión xeométrica de razón 1/4, formada polas áreas dos cadrados dun mesmo cor.**
17. Facemos clic na pestana **Avanzado**, e no apartado **Funcionalidade** marcamos todo excepto **Botón para abrir a xanela da aplicación coa construción**. No apartado **Interface do usuario**, desmarcar todo, excepto **Enable Sabe**, **Print & Undo** e **Allow Rescaling**. Logo clic en **Exportar** e **Gardar**, dándolle o nome ao ficheiro **Suma_progresion_xeometrica_1_4.html**.
18. Gardamos igualmente a construción facendo clic en **Ficheiro/Gardar**, dándolle o nome ao ficheiro **Suma_progresion_xeometrica_1_4.ggb**.

Actividade 5: Xogo de damas

Agora imos realizar un taboleiro para xogar ás damas.

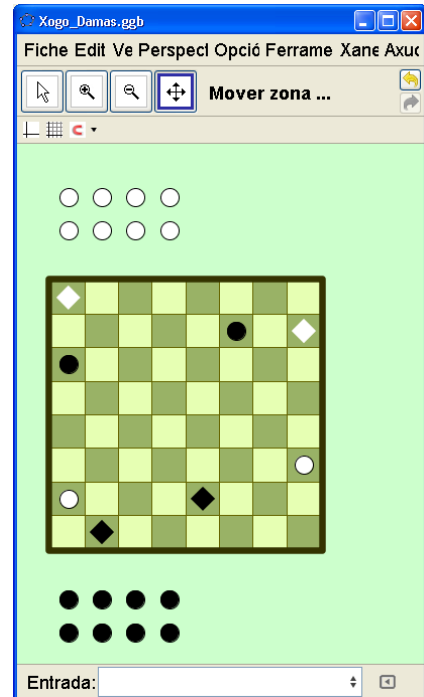
Os Obxectivos que se propón nesta actividade son:

- Elaborar con GeoGebra un taboleiro de damas de 8x8 cadrados con 24 fichas (12 negras e 12 brancas)
- Obter o correspondente arquivo html.

Indicacións:

Partimos das seguintes opcións xerais:

- Eixos ocultos
- Cuadrícula oculta
- Xanela de álgebra visible
- Rotulaxe: Agás novos obxectos
- Captura de puntos: Fixed to grid
- Tamaño da fonte: 18 pt



Para evitar que un escalado accidental poida modificar a grade, pór nas propiedades da zona gráfica, en ambos os eixos distancia igual a 1.

Crear un punto **A** con ambas as coordenadas semienteiras, p.e. $(-0.5, -0.5)$, convertelo en obxecto fixo e ocultalo. Crear un número **n** para o tamaño do taboleiro, cun valor inicial de **8**. Así se poderá modificar o tamaño do taboleiro, se nos interesase.

Crear a lista de cadrados brancos cunha entrada como esta:

listaCBrancos=Secuencia[Secuencia[Polígono[A+(i,j), A+(1+i,j), 4],i,Resto[j,2],n-1,2],j,0,n-1]

O comando Resto[m, k] dá o resto da división enteira de m por k.

Para crear a **listaCNegros** de cadrados negros, basta cambiar na entrada anterior Resto[j, 2] por Resto[j + 1, 2] e cambiar o nome da lista. Pódese recuperar e modificar a entrada anterior, pulsando a tecla de frecha arriba co cursor na liña de entrada.

Agora pódense decorar ambas as listas de forma independente. Convén aumentarlles o sombreado (**Opacity**) e darlles cores adecuadas.

Pódese enmarcar o taboleiro. Unha posibilidade é crear un cadrado co comando:

Polígono[A + (-0.06, -0.06), A + (n + 0.06, -0.06), 4]

e darlle o máximo grosor posible ás súas liñas e sombreado (**Opacity**) en 0.

Situar doce puntos nas posicións das fichas brancas e seleccionándoos conxuntamente, aumentarlles o tamaño ao máximo e darlles cor branca. O mesmo para as fichas negras, excepto a cor, claro. Para que as fichas ocupen unha maior superficie dos escaques, pódese reducir o zoom convenientemente.

Para converter unha ficha en dama, pódese cambiar o seu aspecto facendo clic dereito nela para acceder á súa ficha de propiedades. No momento de exportar, é necesario entón marcar a caixa

Botón dereito permitido, na pestana **Avanzado**.

Gardalo como **Xogo_damas.ggb** e exportalo como html co nome **Xogo_damas.html**.
E xa podemos empezar a xogar!

Referencias:

[1] GeoGebra: <http://www.geogebra.org>

[2] XeoDin: <http://www.agapemacoruna.com/xeodin>

[3] Larrosa Cañestro, Ignacio: <http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/>