

## EN TEMPOS DE PANDEMIA: MODELOS

**RODRÍGUEZ MAYO, FRANCISCO MANUEL**

*Catedrático de secundaria en estado de xúbilo  
fmr Mayo@gmail.com*

### Resumo

Di Penrose que, en contra do que pensamos a maioría, as Matemáticas e a Física son esencialmente descritivas. Só poden facer predicións cando os fenómenos son simples.

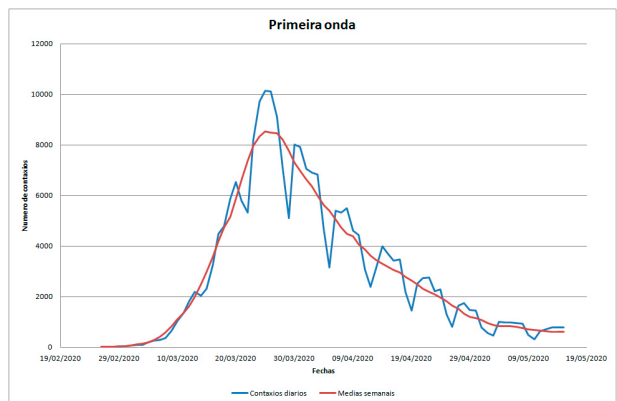
A evolución dunha pandemia non é un fenómeno simple. Son moitas as variables que inflúen e, ademais, o coñecemento da súa evolución afecta a esa mesma evolución.

Nesta ponencia intento ver como modelos matemáticos simples, comprensibles para secundaria, poden axudarnos a entender que é unha epidemia e como foi a evolución da pandemia en España.

### Falemos de modelos.

Un modelo matemático é, no caso máis sinxelo, unha simple fórmula na que os valores dunha magnitude (número de infectados da covid-19 por exemplo) obtéñense a partir dos valores doutra (o tempo na pandemia e tamén en todo o que sigue<sup>1</sup>).

En moitas ocasións, é máis doado coñecer a variación da magnitude polo que moitos modelos empezan por facer suposicións sobre esa variación.



\* Grafico cos datos oficiais do Ministerio de Sanidade.

\*\*A liña encarnada son os valores suavizados empregando medias semanas.

<sup>1</sup> A variable tempo foi a única considerada durante a maior parte da historia da Análise Matemática.

### Modelo exponencial.

Nos primeiros días de cada onda da epidemia, o número de novos contaxios mantíñase proporcional ao número de infectados. Eran momentos nos que se dicían cousas como “cada día aumenta un 10% o número de infectados” ou “duplicáanse os casos cada tres días”:

|           |   |     |                        |  |     |                      |
|-----------|---|-----|------------------------|--|-----|----------------------|
| Tempo     | 0 | 3   | 6                      | 9                                      | ... | x                    |
| Magnitude | b | b·2 | b·2·2=b·2 <sup>2</sup> | (b·2 <sup>2</sup> )·2=b·2 <sup>3</sup> | ... | b·2 <sup>(x/3)</sup> |

\*“b” sería o número inicial de casos.

Empezando por 1 caso e supoñendo que se duplican os casos cada tres días, ao cabo de seis meses teríamos:  $f(180) = 1 \cdot 2^{\left(\frac{180}{3}\right)} = 1 \cdot 2^{60} \approx 1,15 \cdot 10^{18}$  máis de un millóns de billóns de casos (a poboación española é duns  $4,7 \cdot 10^7$  e a do mundo  $7 \cdot 10^9$ ). É a consecuencia do famoso “crecemento exponencial”.

Hai moi moitos xeitos de escribir a fórmula que corresponde a unha función exponencial:

$$f(x) = b \cdot 2^{\left(\frac{x}{3}\right)} = b \cdot \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x \xrightarrow{2^{\frac{1}{3}}=a} f(x) = b \cdot a^x$$

*e o número inicial de casos.  
corresponde á taxa de variación. Para un  
crecemento do 30% diario sería:  $a=1+30/100$*

Poden escribirse empregando a función exponencial estándar  $e^x$ :

$$f(x) = b \cdot a^x \xrightarrow{a=e^{\text{Ln}(a)}} f(x) = b \cdot \left(e^{\text{Ln}(a)}\right)^x = b \cdot e^{\text{Ln}(a) \cdot x} \xrightarrow{r=\text{Ln}(a)} f(x) = b \cdot e^{rx}$$

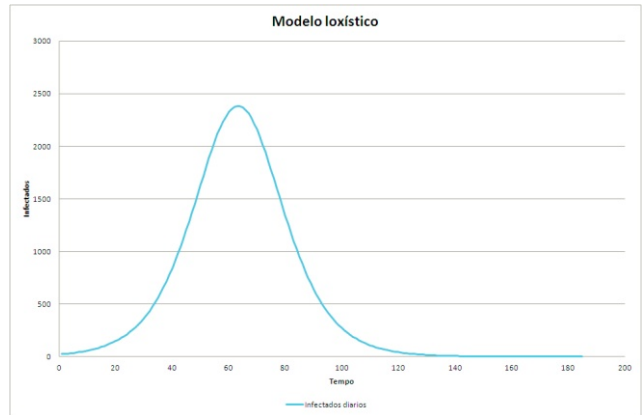
No caso das infeccións, ao principio, o modelo exponencial describe de xeito correcto a situación pero, nunha situación real, ese crecemento non pode manterse pois a poboación é limitada.

### Modelo loxístico

Cando a magnitude non pode medrar ata o infinito, o modelo exponencial non pode describir axeitadamente a situación. O modelo loxístico introduce un valor máximo para a magnitude e, fai que o crecemento varíe en función da diferenza entre os infectados e ese máximo.

A función que describe este proceso sería da forma:  $f(x) = \frac{P \cdot b \cdot e^{rx}}{P + b(e^{rx} - 1)}$  Onde b, ao igual ca na exponencial, é poboación inicial, r define a taxa de crecemento e P a poboación total.

A gráfica amosa o comportamento do modelo loxístico, pero comparándoa coa da primeira onda vemos que hai notables diferenzas (ten un eixe de simetría).



## Modelos dinámicos

Un modelo dinámico parte dun valor inicial e das leis de cambio, o que permite atopar a función que describe o proceso<sup>2</sup>.

No noso caso:

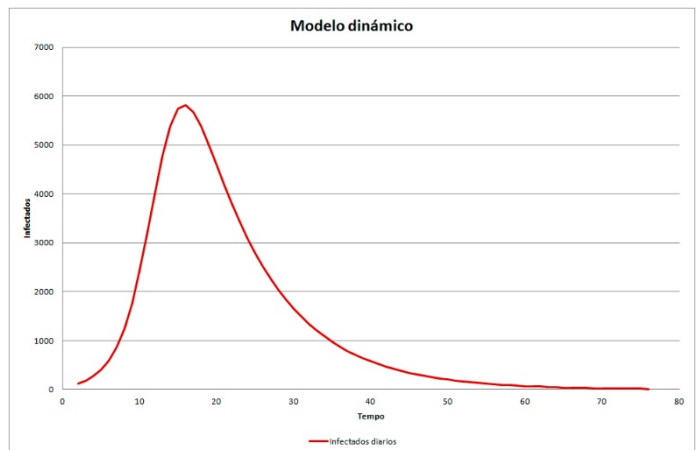
1. Partimos dun certo número de persoas infectadas 250 dunha poboación de 100000.
2. Supoñemos que cada persoa mantén contactos estreitos con outras 5 e que en cada un deses contactos hai unha probabilidade 0,1 de contaxio. Así, a probabilidade de que unha persoa se contaxie nunha reunión sería:

$$p_1 = \left[ 1 - \left( \frac{100000 - 250}{100000} \right)^5 \right] \cdot 0,1$$

Multiplicando por 100000 danos o número de infeccións.

Podemos levar ese proceso a unha folla de cálculo e repetir o cálculo con so arrastrar. O resultado é a gráfica que vemos, asombrosamente similar a das ondas da pandemia (agás a segunda, distorsionada porque Madrid tívola antes, todas son semellantes a primeira).

Este modelo pode perfeccionarse engadindo mais complexidade á lei de cambio: as persoas inmunes, o período no que unha persoa é contaxiosa, etc.



<sup>2</sup> Con variables continuas estaríamos diante dunha ecuación diferencial.