Fundamentos Físicos

Jorge Porta
taylor@mundo-r.com

Fundamentos teóricos en los que se basa el programa *Viaje a Barataria* (http://www.enciga.org/taylor/relatividad/barataria.htm) sobre la paradoja de los gemelos. Se especifica el tratamiento dado a las fases de aceleración de la nave,

El movimiento de la nave durante las fases de aceleración se concibe como el tránsito a través de un continuo de sistemas de referencia inerciales, de manera que al cabo de un intervalo infinitesimal de tiempo propio dt' la nave accede a un nuevo sistema de referencia que se mueve con respecto al anterior a una velocidad $dv' = a \cdot dt'$ con a constante. Todas las magnitudes se refieren al sistema de referencia propio de la nave en cada instante. (La aceleración a así definida es precisamente la componente espacial del cuadrivector relativista aceleración).

Con respecto al sistema de referencia propio de la Tierra, si antes del tránsito la nave se movía a una velocidad v, después se moverá a una velocidad $v + dv$ dada por la ley de composición de velocidades:

$$v + dv = \frac{v + dv'}{1 + \frac{v \cdot dv'}{c^2}} = v + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dv'$$

$$dv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a \cdot dt'$$

Como dt' es el tiempo propio de la nave, el tránsito dura desde el punto de vista terrestre un tiempo

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

$$dv = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a \cdot dt$$

La dependencia de la velocidad con el tiempo se obtiene integrando la expresión:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv = a \cdot dt$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = a \cdot t + \kappa$$

donde κ es una constante que se determina por las condiciones iniciales. Este mismo resultado se obtiene suponiendo una variación constante del momento lineal ($p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$) con el tiempo.

La expresión buscada es:

$$v = \frac{a \cdot t + \kappa}{\sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot t + \kappa}{c}\right)^2}} \tag{2}$$

El factor de contracción :

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot t + \kappa}{c}\right)^2}} \tag{3}$$

El tiempo propio de la nave en función del tiempo terrestre se obtiene integrando la ecuación (1):

$$t' = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot t + \kappa}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a} arcsenh \left(\frac{a \cdot t + \kappa}{c}\right) + \theta \tag{4}$$

donde θ es una constante dependiente de las condiciones iniciales.

La posición de la nave se obtiene integrando la ecuación (2):

$$x_{Nave} = \frac{c^2}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot t + \kappa}{c}\right)^2} + \epsilon \tag{5}$$

con ϵ constante. Nótese que si $t' = 0, v = 0$ *y* $x_{Nave} = 0$ en el instante $t = 0$, todas las constantes aditivas son cero salvo ϵ, que adopta un valor igual a $-c^2/a$.

Las ecuaciones desde la (2) a la (5) se utilizan en el programa para modelar el viaje desde el punto de vista terrestre. La modelización desde el punto de vista de la nave se refiere en cada instante al sistema inercial que en ese instante tiene la velocidad de la nave, el origen de coordenadas en la posición de la nave y sus relojes marcando la misma lectura que el reloj de la nave. Despejando t de la ecuación (4) obtenemos la lectura de un reloj del sistema Tierra que en el instante t' se encuentra en la posición x_{Nave}:

$$t = \frac{c \cdot senh\left(\frac{a}{c}\left(t' - \theta\right)\right) - \kappa}{a} \quad (x = x_{Nave}) \tag{6}$$

Podemos sustituir t en la ecuación (2) para obtener la velocidad en función de t':

$$v = c \cdot tgh\left(\frac{a}{c}\left(t' - \theta\right)\right) \tag{7}$$

Es necesario tener en cuenta que la velocidad de alejamiento del sistema Tierra con respecto a la nave es $-v$. Además esa velocidad mide únicamente la rapidez con la que se aleja de la nave el punto del sistema Tierra que se encuentra en su misma posición (x_{Nave}). Los demás puntos del sistema Tierra se ven afectados por la contracción de Lorentz que varía con el tiempo.

Para los cálculos posteriores es útil obtener el valor x_{Nave} en función del tiempo t'. Para ello sustituimos el valor de t dado por la expresión (6) en la ecuación (5):

$$x_{Nave} = \frac{c^2}{a} cosh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right) + \epsilon \tag{8}$$

El factor de contracción es:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{cosh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right)} \tag{9}$$

La coordenada x' en el instante t' de un punto del sistema Tierra con coordenada x se obtiene teniendo en cuenta que la distancia de ese punto a la nave en el sistema Tierra es $x - x_{Nave}$ y aplicando la contracción de Lorentz.

$$x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,(x - x_{Nave}) = \frac{x - \epsilon}{cosh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right)} - \frac{c^2}{a} \tag{10}$$

El tiempo propio de los planetas se obtiene a partir de las transformaciones de Lorentz, calculando en primer lugar la diferencia de lecturas entre dos relojes del sistema Tierra separados una distancia $\Delta x'$ en el mismo instante t'

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c} senh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right) \Delta x'$$

donde se tiene en cuenta que la velocidad del sistema Tierra con respecto a la nave es $-v$.

Teniendo en cuenta (9) obtenemos la diferencia de tiempos en función de la diferencia de posiciones en el sistema Tierra:

$$\Delta t = \frac{1}{c} tgh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right) \Delta x$$

Las expresiones (8) y (6) nos proporcionan un punto de referencia. Utilizándolas obtenemos finalmente la expresión de t en función de x y t'.

$$t = \frac{1}{c} tgh\left(\frac{a}{c}(t' - \theta)\right)(x - \epsilon) - \frac{\kappa}{a} \tag{11}$$

Las expresiones (9), (10) y (11) se utilizan para obtener la contracción, posición y lectura de los relojes de los planetas en modo "*Desde Nave*"